# Окружности

**1.** В треугольнике $ABC$ угол $B$ равен 72°, угол $C$ равен 63°, $BC = 2\sqrt{2}$. Найдите радиус описанной около этого треугольника окружности.

**Решение.**

Угол $A$ треугольника $ABC$ равен $\angle A = 180° - \angle B - \angle C = 45°$.

Радиус описанной окружности равен $\dfrac{BC}{2\sin A} = 2$.

Ответ: 2.

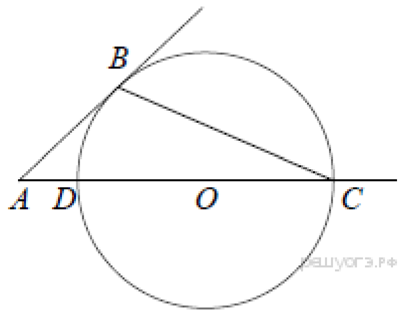
**2.** Окружность с центром на стороне $AC$ треугольника $ABC$ проходит через вершину $C$ и касается прямой $AB$ в точке $B$. Найдите диаметр окружности, если $AB = 15$, $AC = 25$.

**Решение.**

Пусть $DC = x$. Тогда по свойству касательной и секущей, проведённых из одной точки к окружности, получаем:

$$AB^2 = AC(AC - x) \Leftrightarrow 225 = 25(25 - x),\ \text{откуда}\ x = 16.$$

Ответ: 16.

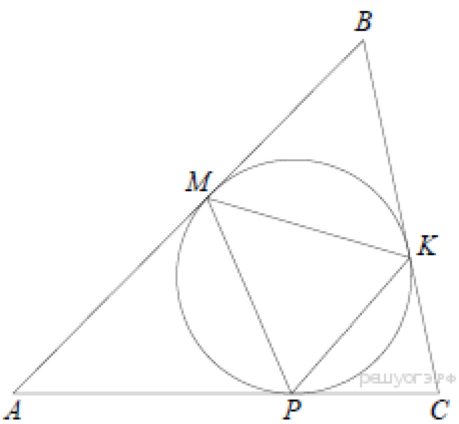



**3.** Окружность, вписанная в треугольник $ABC$, касается его сторон в точках $M$, $K$ и $P$. Найдите углы треугольника $ABC$, если углы треугольника $MKP$ равны 49°, 69° и 62°.

**Решение.**

Пусть

$$\angle BAC = \alpha,\ \angle ABC = \beta,\ \angle ACB = \gamma;$$
$$\angle PKM = 49°,\ \angle MPK = 69°,\ \angle KMP = 62°.$$




По свойству касательных $AM = AP$, $BM = BK$, $CP = CK$. Значит, треугольники $AMP$, $BMK$ и $CPK$ равнобедренные, откуда получаем:

$$\angle AMP = \angle APM = 90° - \frac{\alpha}{2},\ \angle BMK = \angle BKM = 90° - \frac{\beta}{2},$$
$$\angle CPK = \angle CKP = 90° - \frac{\gamma}{2}.$$

Значит, $\angle PKM = 180° - \angle CKP - \angle BKM = \dfrac{\gamma + \beta}{2} = 49°$.

Аналогично получаем, что $\angle MPK = \dfrac{\alpha + \gamma}{2} = 69°$ и $\angle KMP = \dfrac{\alpha + \beta}{2} = 62°$.

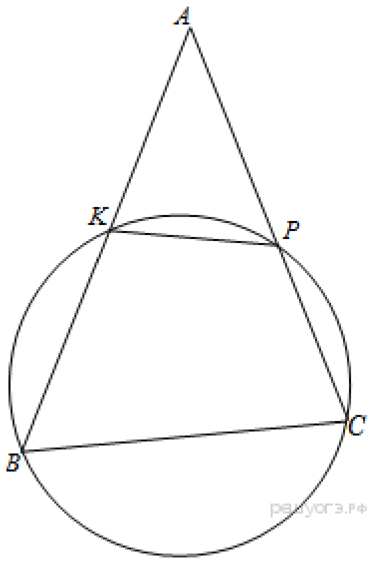
Решая систему относительно $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$, получаем, что углы треугольника $ABC$ равны 82°, 42°, 56°.

Ответ: 82°, 42°, 56°.

**4.** Окружность пересекает стороны $AB$ и $AC$ треугольника $ABC$ в точках $K$ и $P$ соответственно и проходит через вершины $B$ и $C$. Найдите длину отрезка $KP$, если $AK = 18$, а сторона $AC$ в 1,2 раза больше стороны $BC$.

**Решение.**

Поскольку четырёхугольник $KPCB$ вписан в окружность, сумма противоположных углов равна 180°, следовательно, $\angle KBC + \angle KPC = 180^\circ$. Углы $APK$ и $KPC$ — смежные, следовательно, $\angle APK + \angle KPC = 180^\circ$. Из приведённых равенств, получаем, что $\angle KBC = \angle APK$. Рассмотрим треугольники $ABC$ и $AKP$, угол $A$ — общий, углы $APK$ и $KBC$ равны, следовательно, треугольники подобны, откуда $\frac{KP}{BC} = \frac{AK}{AC} = \frac{AP}{AB}$. Используя равенство $\frac{AK}{AC} = \frac{KP}{BC}$, найдём $KP$:




$$\frac{AK}{1,2BC} = \frac{KP}{BC} \Leftrightarrow KP = \frac{AK}{1,2} \Leftrightarrow KP = 15.$$

Ответ: 15.