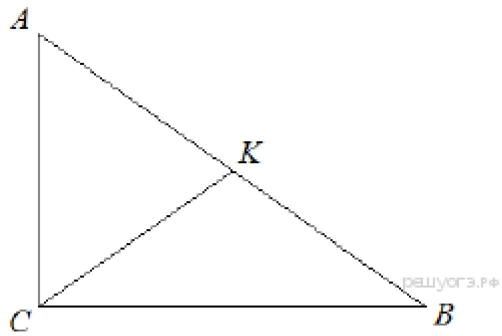
Треугольники

1. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C известны катеты: $AC=6$, $BC=8$. Найдите медиану CK этого треугольника.

Решение.

Медиана, проведенная к гипотенузе, равна её половине:



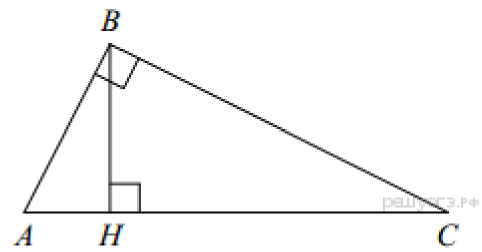
$$CK=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\sqrt{AC^2+BC^2}=\frac{1}{2}\sqrt{36+64}=5.$$

Ответ: 5.

2. Точка H является основанием высоты, проведённой из вершины прямого угла B треугольника ABC к гипотенузе AC. Найдите AB, если $AH=5$, $AC=20$.

Решение.

Поскольку BH — высота треугольника ABC, прямоугольные треугольники ABC и AHB подобны.



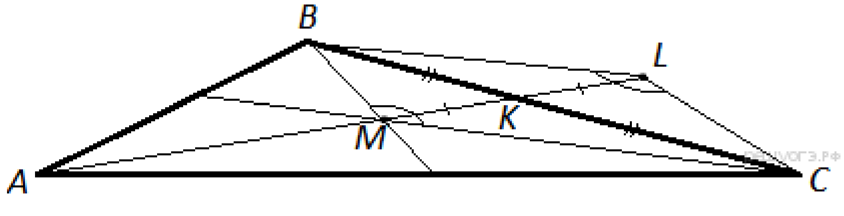
Следовательно, $\frac{AB}{AC}=\frac{AH}{AB}$, откуда $AB=\sqrt{AC\cdot AH}=10.$

Ответ: 10.

3. Медианы треугольника ABC пересекаются в точке M. Найдите длину медианы, проведённой к стороне BC, если угол BAC равен 47°, угол BMC равен 133°, $BC=4\sqrt{3}$.

Решение.

Обозначим середину стороны BC за K. Продлим MK на свою длину за точку K до точки L. Четырёхугольник $BLCM$ — параллелограмм, потому что $MK=KL$ и $BK=KC$. Значит, $\angle BLC=\angle BMC=$ 133°, поэтому четырёхугольник $ABLC$ — вписанный. Тогда $AK\cdot KL=BK\cdot KC$; $\frac{AK^2}{3}=\frac{BC^2}{4}$; $AK=6$.



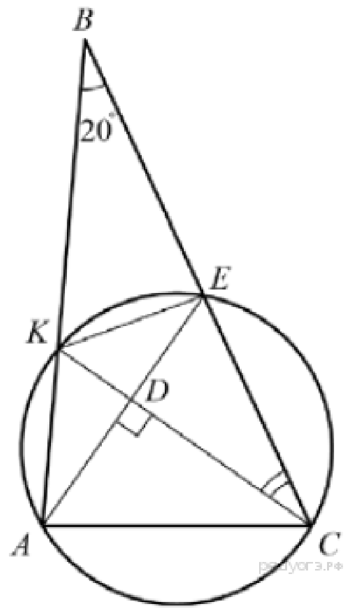
Ответ: 6.

4. Окружность проходит через вершины A и C треугольника ABC и пересекает его стороны AB и BC в точках K и E соответственно. Отрезки AE и CK перпендикулярны. Найдите $\angle KCB$, если $\angle ABC=20°$.

Решение.

Углы AKC и AEC равны, т. к. опираются на одну дугу окружности; следовательно, $\angle BKC=\angle BEA$, как смежные с ними. Из четырёхугольника $BKDE$: $\angle BKC=\frac{1}{2}(360°-90°-20°)=125°$. Из ΔBKC: $\angle KCB=180°-125°-20°=35°$.

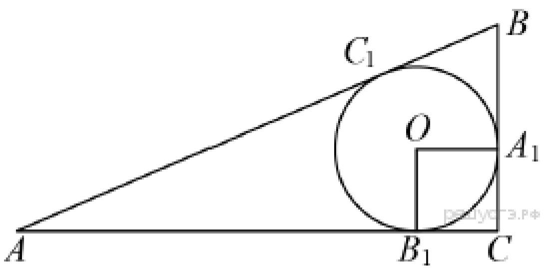
Ответ: 35°.



5. В треугольнике ABC угол C равен 90°, радиус вписанной окружности равен 2. Найдите площадь треугольника ABC, если $AB = 12$.

Решение.

Пусть A_1, B_1 и C_1 — точки касания вписанной окружности со сторонами BC, AC и AB соответственно. Радиус вписанной окружности обозначим r. Тогда $AC_1 = AB_1$ и $CA_1 = CB_1 = r$. Периметр треугольника ABC равен $2AC_1 + 2BC_1 + 2CA_1 = 2AB + 2r$. Полупериметр p равен $AB + r$.

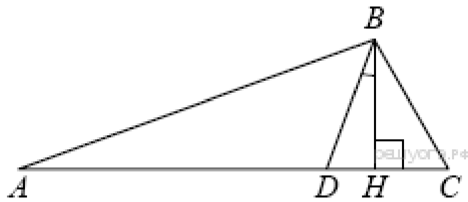


По формуле площади треугольника находим

$$S = p \cdot r = (AB + r) \cdot r = 28.$$

Ответ: 28.

6. В треугольнике ABC углы A и C равны 20° и 60° соответственно. Найдите угол между высотой BH и биссектрисой BD.



Решение.

Найдем $\angle ABC$:

$$\angle ABC = 180° - \angle A - \angle C = 180° - 20° - 60° = 100°.$$

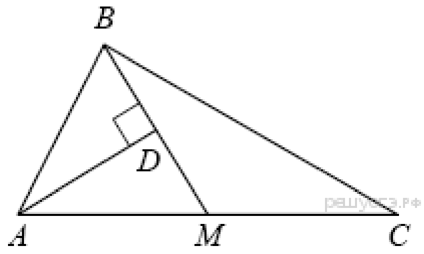
Так как BD - биссектриса, то $\angle DBC = \frac{1}{2}\angle ABC = 50°$.

Треугольник HBC- прямоугольный. Так как $\angle C = 60°$, то $\angle HBC = 30°$.

Таким образом, искомый угол DBH равен $50° - 30° = 20°$.

Ответ: $\angle DBH = 20°$.

7. Прямая AD, перпендикулярная медиане BM треугольника ABC, делит её пополам. Найдите сторону AC, если сторона AB равна 4.



Решение.

Так как высота AD, проведенная к медиане BM делит ее пополам, то треугольник ABM является равнобедренным, поэтому AB=AM=4. Так как BM- медиана, то AM=MC, таким образом, AC=2AM=8.

Ответ: AC=8.

8. Катет и гипотенуза прямоугольного треугольника равны 18 и 30. Найдите высоту, проведённую к гипотенузе.

Решение.

По теореме Пифагора второй катет равен $\sqrt{30^2-18^2}=24$. С одной стороны, площадь треугольника равна половине произведения катетов, а с другой стороны, она равна половине произведения гипотенузы на высоту, проведённую к ней. Следовательно, искомая высота равна $\frac{18\cdot 24}{30}=14,4$.

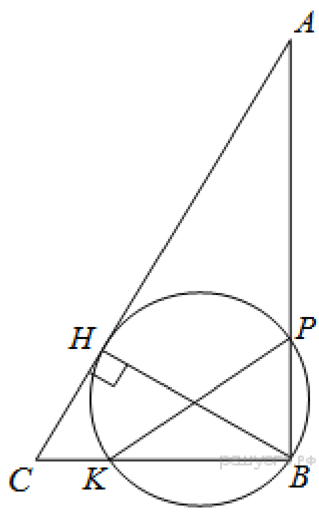
Ответ: 14,4.

9. Точка H является основанием высоты BH, проведённой из вершины прямого угла B прямоугольного треугольника ABC. Окружность с диаметром BH пересекает стороны AB и CB в точках P и K соответственно. Найдите PK, если $BH = 16$.

Решение.

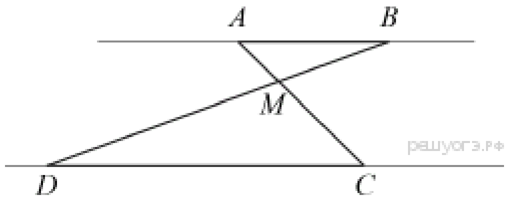
Угол PBK — вписанный, он равен 90° и опирается на дугу KHP, следовательно, дуга KHP равна 180°, значит, хорда PK — диаметр окружности и $PK = 16$.

Ответ: 16.



10. Отрезки AB и DC лежат на параллельных прямых, а отрезки AC и BD пересекаются в точке M. Найдите MC, если $AB = 16$, $DC = 24$, $AC = 25$.

Решение.
Углы DCM и BAM равны как накрест лежащие, углы DMC и BMA равны как вертикальные, следовательно, треугольники DMC и BMA подобны по двум углам.



Значит, $\dfrac{AM}{MC} = \dfrac{AB}{CD} = \dfrac{16}{24} = \dfrac{2}{3}$. Следовательно,

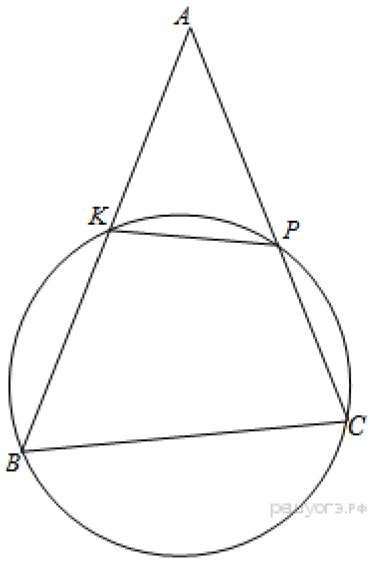
$$AC = AM + MC = \frac{2}{3}MC + MC = \frac{5}{3}MC.$$

Откуда $MC = \dfrac{AC}{5} \cdot 3 = \dfrac{25}{5} \cdot 3 = 15.$

Ответ: 15.

11. Окружность пересекает стороны AB и AC треугольника ABC в точках K и P соответственно и проходит через вершины B и C. Найдите длину отрезка KP, если $AP = 18$, а сторона BC в 1,2 раза меньше стороны AB.

Решение.
Поскольку четырёхугольник $KPCB$ вписан в окружность, сумма противоположных углов равна 180°, следовательно, $\angle KBC + \angle KPC = 180^\circ$. Углы APK и KPC — смежные, следовательно, $\angle APK + \angle KPC = 180^\circ$. Из приведённых равенств, получаем, что $\angle KBC = \angle APK$. Рассмотрим треугольники ABC и AKP, угол A — общий, углы APK и KBC равны, следовательно, треугольники подобны, откуда $\dfrac{KP}{BC} = \dfrac{AK}{AC} = \dfrac{AP}{AB}$. Используя равенство $\dfrac{KP}{BC} = \dfrac{AP}{AB}$, найдём KP:

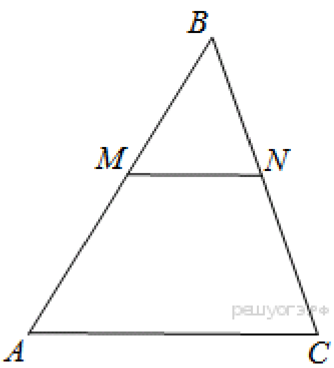


$$\frac{KP}{BC} = \frac{AP}{1,2BC} \Leftrightarrow KP = \frac{AP}{1,2} \Leftrightarrow KP = 15.$$

Ответ: 15.

12. Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно. Найдите BN, если $MN = 13$, $AC = 65$, $NC = 28$.

Решение.
Рассмотри треугольники ABC и BMN, углы BMN и BAC равны как соответственные при параллельных прямых, угол B — общий, следовательно, эти треугольники подобны, откуда $\dfrac{BC}{BN} = \dfrac{AB}{BM} = \dfrac{AC}{MN}$. Найдём BN:



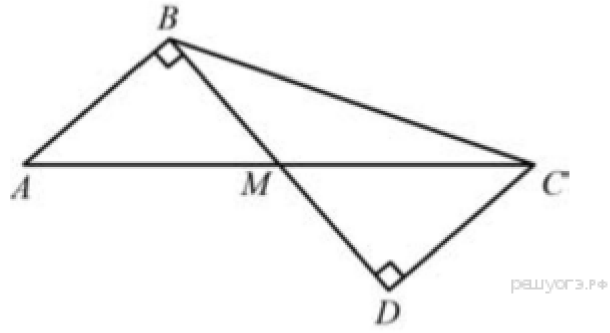
$$\frac{BC}{BN} = \frac{AC}{MN} \Leftrightarrow \frac{BN + NC}{BN} = \frac{65}{13} \Leftrightarrow 5BN = BN + 28 \Leftrightarrow BN = 7.$$

Ответ: 7.

13. Найдите отношение двух сторон треугольника, если его медиана, выходящая из их общей вершины, образует с этими сторонами углы в 30° и 90°.

Решение.

Пусть в треугольнике ABC отрезок BM служит медианой, при этом $\angle ABM = 90°$, $\angle CBM = 30°$. Возьмем на продолжении отрезка BM точку D так, что $BM = MD$. Тогда треугольники ABM и CDM равны по двум сторонам и углу между ними. Значит, $\angle BDC = 90°$. Поэтому треугольник BDC — прямоугольный с углом CBD, равным 30°. Следовательно, $\frac{AB}{BC} = \frac{CD}{BC} = \frac{1}{2}$.



Ответ: 1:2.

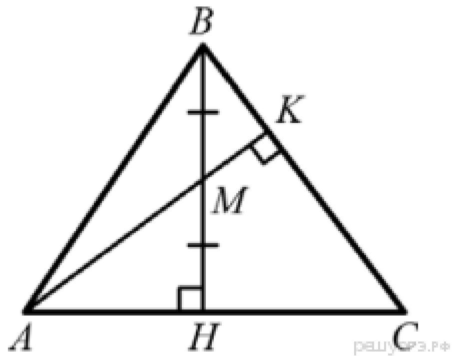
14. Высота треугольника разбивает его основание на два отрезка с длинами 8 и 9. Найдите длину этой высоты, если известно, что другая высота треугольника делит ее пополам.

Решение.

Пусть высота BH треугольника ABC разбивает основание AC на отрезки $AH = 8$ и $CH = 9$, высота AK пересекает высоту BH в точке M, причем $BM = MH = x$. Треугольники AHM, BKM и BHC подобны, поскольку они прямоугольные и первые два имеют равные углы (углы AMH и BMK равны как вертикальные), а вторые два имеют общий угол. Получаем пропорцию

$$\frac{MH}{AH} = \frac{CH}{BH}, \text{ то есть } \frac{x}{8} = \frac{9}{2x}, \text{ откуда } x^2 = 36.$$

Следовательно, $BM = 6$ и $BH = 12$.



Ответ: 12.

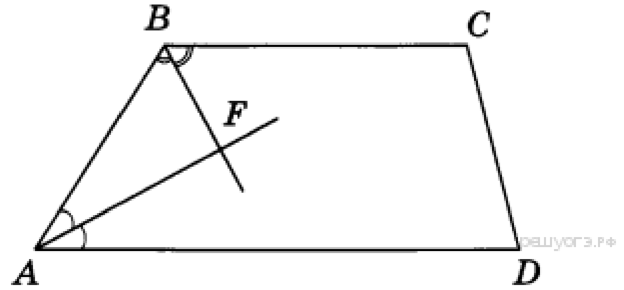
15. Биссектрисы углов A и B при боковой стороне AB трапеции $ABCD$ пересекаются в точке F. Найдите AB, если $AF = 24,\ BF = 10$.

Решение.

$ABCD$ — трапеция с основаниями AD и BC, то есть прямые AD и BC параллельны. Углы BAD и ABC — внутренние односторонние при параллельных прямых AD и BC и секущей AB, следовательно, $\angle BAD + \angle ABC = 180°$.

Учитывая, что AF и BF — биссектрисы углов BAD и ABC, то $\angle BAF + \angle ABF = \frac{1}{2}(\angle BAD + \angle ABC) = 90°$.

Треугольник ABF — прямоугольный, тогда по теореме Пифагора получаем $AB - 26$.

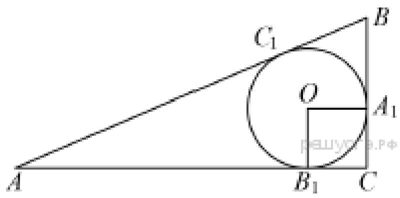


Ответ: 26.

16. В треугольнике ABC угол C равен 90°, радиус вписанной окружности равен 2. Найдите площадь треугольника ABC, если $AB = 12$.

Решение.

Пусть A_1, B_1 и C_1 — точки касания вписанной окружности со сторонами BC, AC и AB соответственно. Радиус вписанной окружности обозначим r. Тогда $AC_1 = AB_1$, $BC_1 = BA_1$ и $CA_1 = CB_1 = r$. Периметр треугольника ABC равен



$$2AC_1 + 2BC_1 + 2CA_1 = 2AB + 2r,$$

а его полупериметр p равен $AB + r$.

По формуле площади треугольника находим $S = p \cdot r = (AB + r) \cdot r = 28$.

Ответ: 28.

17. Медиана BM и биссектриса AP треугольника ABC пересекаются в точке K, длина стороны AC относится к длине стороны AB как 7:10. Найдите отношение площади треугольника AKM к площади треугольника ABC.

Решение.

По свойству медианы известно, что медиана треугольника делит его на два равновеликих треугольников. Таким образом, $S_{ABM} = S_{BMC} = \frac{S_{ABC}}{2}$. По свойству биссектрисы AP имеем: $\frac{AM}{AB} = \frac{KM}{KB}$. Из условия задачи известно, что $\frac{AC}{AB} = \frac{7}{10}, \frac{AM}{AC} = \frac{1}{2}$, следовательно, $\frac{2AM}{AB} = \frac{7}{10} \Leftrightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{7}{20} = \frac{KM}{KB}$

$$S_{AKM} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot KM = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{20} BK$$

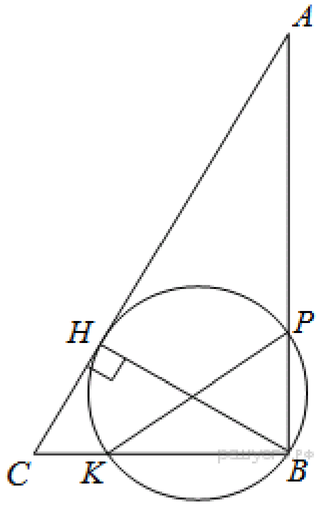
Так как высота h является общей для треугольников AKM и ABK, имеем:

$$S_{AKM} = \frac{7}{20} S_{ABK}$$
$$S_{ABM} = S_{ABK} + S_{AKM} = S_{ABK} + \frac{7}{20} S_{ABK} = \frac{27}{20} S_{ABK}$$
$$S_{ABC} = 2S_{ABM} = 2 \cdot \frac{27}{20} S_{ABK} = \frac{27}{10} S_{ABK}$$
$$\frac{S_{AKM}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{7}{20} S_{ABK}}{\frac{27}{10} S_{ABK}} = \frac{7}{54}$$

Ответ: $\frac{7}{54}$

18. Точка H является основанием высоты BH, проведённой из вершины прямого угла B прямоугольного треугольника ABC. Окружность с диаметром BH пересекает стороны AB и CB в точках P и K соответственно. Найдите PK, если $BH = 11$.

Решение.
Угол PBK — вписанный, он равен $90°$ и опирается на дугу KHP, следовательно, дуга KHP равна $180°$, значит, хорда PK — диаметр окружности и $PK = 11$.



Ответ: 11.