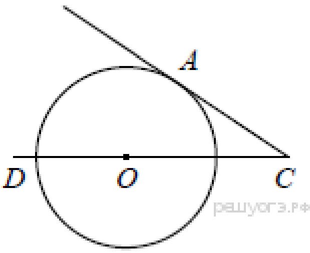
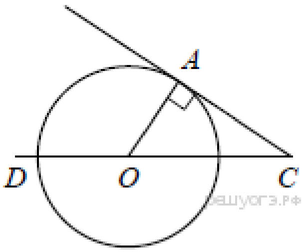
Углы

1. Найдите угол ACO, если его сторона CA касается окружности, O — центр окружности, а дуга AD окружности, заключённая внутри этого угла, равна 100°.



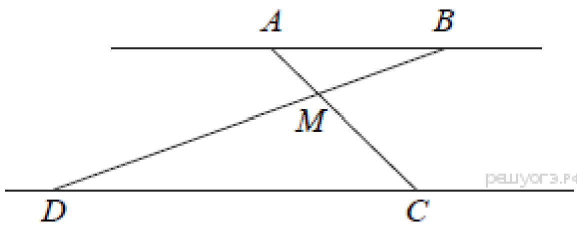
Решение.
Проведём радиус OA. Треугольник AOC — прямоугольный, $\angle A = 90°$. $\angle COA = 180° - \angle AOD = 180° - 100° = 80°$; $\angle ACO = 90° - 80° = 10°$.



Ответ: 10.

2. Отрезки AB и DC лежат на параллельных прямых, а отрезки AC и BD пересекаются в точке M. Найдите MC, если $AB = 16$, $DC = 24$, $AC = 25$.

Решение.
Углы DCM и BAM равны как накрест лежащие, углы DMC и BMA равны как вертикальные, следовательно, треугольники DMC и BMA подобны по двум углам. Значит,



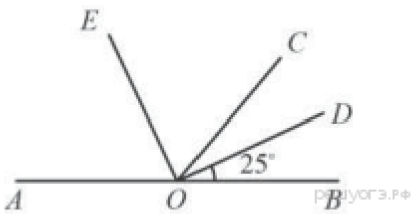
$$\frac{AM}{MC} = \frac{AB}{CD} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}.$$

Следовательно,

$$AC = AM + MC = \frac{2}{3}MC + MC = \frac{5}{3}MC, \text{ откуда } MC = \frac{3AC}{5} = 15.$$

Ответ: 15.

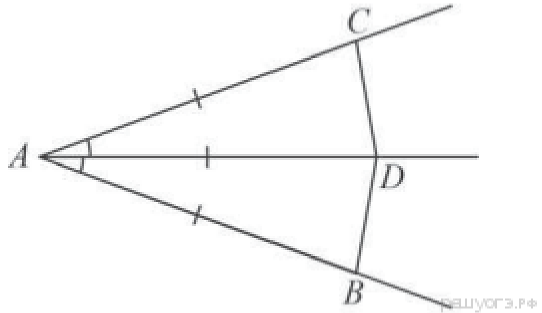
3. Найдите величину угла AOE, если OE — биссектриса угла AOC, OD — биссектриса угла COB.



Решение.
Имеем: $\angle COB = 2 \cdot 25° = 50°$; $\angle AOC = 180° - 50° = 130°$; $\angle AOE = 130° : 2 = 65°$.

Ответ: 65°.

4. На сторонах угла BAC и на его биссектрисе отложены равные отрезки AB, AC и AD. Величина угла BDC равна 160°. Определите величину угла BAC.



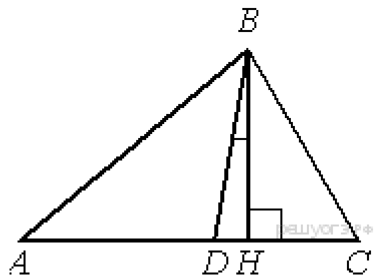
Решение.

Треугольники ADB и ACD равнобедренные и равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно,

$$\angle ACD = \angle CDA = \angle ADB = \angle ABD = 80°; \ \angle BAC = 360° - 4 \cdot 80° = 40°.$$

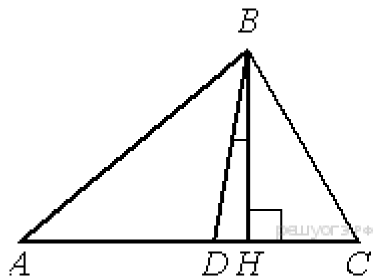
Ответ: 40°.

5. В треугольнике ABC углы A и C равны 40° и 60° соответственно. Найдите угол между высотой BH и биссектрисой BD.



Решение.

Из треугольника ABC найдем $\angle ABC$:



$$\angle ABC = 180° - \angle A - \angle C = 180° - 40° - 60° = 80°.$$

BD — биссектриса, следовательно, $\angle DBC = \frac{1}{2}\angle ABC = 40°$.

Треугольник HBC — прямоугольный, следовательно:

$$\angle HBC = 90° - \angle C = 90° - 60° = 30°.$$

Найдём угол DBH:

$$\angle DBH = \angle DBC - \angle HBC = 40° - 30° = 10°.$$

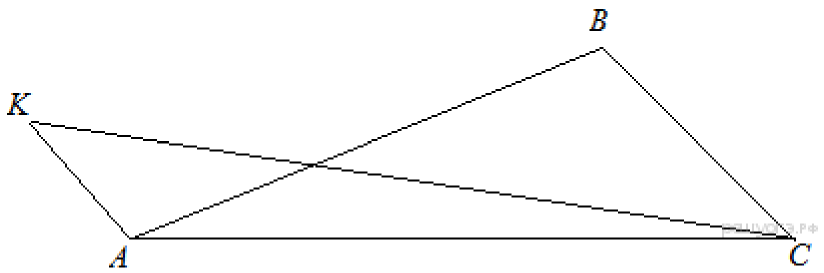
Ответ: 10°.

6. Стороны AC, AB, BC треугольника ABC равны $2\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$ и 2 соответственно. Точка K расположена вне треугольника ABC, причём отрезок KC пересекает сторону AB в точке, отличной от B. Известно, что треугольник с вершинами K, A и C подобен исходному. Найдите косинус угла AKC, если $\angle KAC > 90°$.

Решение.

Рассмотрим подобные треугольники ABC и AKC и установим соответствие между их углами. Против большей стороны всегда лежит больший угол, в треугольнике ABC это угол ABC, в треугольнике KAC, в свою очередь, есть тупой угол KAC и он является наибольшим, значит $\angle KAC = \angle ABC$. Угол ACK заведомо не может быть равен углу ACB, так как он составляет только его часть. Следовательно угол ACB равен углу AKC. Найдём косинус угла AKC, используя теорему косинусов:

$$\cos\angle AKC = \cos\angle ACB = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2AC\cdot BC} = \frac{20+4-7}{2\cdot 2\sqrt{5}\cdot 2} = \frac{17}{8\sqrt{5}} = \frac{17\sqrt{5}}{40}.$$

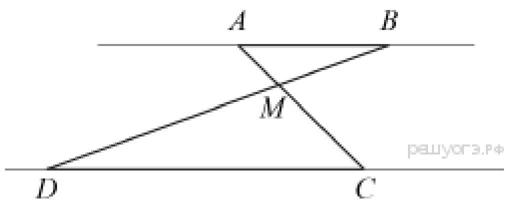


Ответ: $\dfrac{17\sqrt{5}}{40}$.

7. Отрезки AB и DC лежат на параллельных прямых, а отрезки AC и BD пересекаются в точке M. Найдите MC, если $AB = 10$, $DC = 25$, $AC = 56$.

Решение.

Углы DCM и BAM равны как накрест лежащие, углы DMC и BMA равны как вертикальные, следовательно, треугольники DMC и BMA подобны по двум углам.



Значит, $\dfrac{AM}{MC} = \dfrac{AB}{CD} = \dfrac{10}{25} = 0,4.$ Следовательно,

$$AC = AM + MC = 0,4MC + MC = 1,4MC.$$

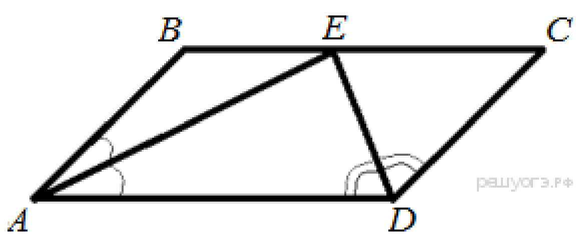
Откуда $MC = \dfrac{AC}{1,4} = 40.$

Ответ: 40.

8. Биссектрисы углов A и D параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке, лежащей на стороне BC. Найдите BC, если $AB = 34$.

Решение.

По определению параллелограмма $BC \parallel AD$, AE — секущая при параллельных прямых, следовательно, углы BEA и EAD равны как накрест лежащие. Поскольку $\angle BEA = \angle BAE$, треугольник ABE — равнобедренный, откуда $AB = BE$. Аналогично, треугольник CED — равнобедренный и $EC = CD$. Стороны AB и CD равны, как противоположные стороны параллелограмма, следовательно, $AB = BE = EC = CD = 34$. Таким образом, $BC = 2BE = 68$.



Ответ: 68.

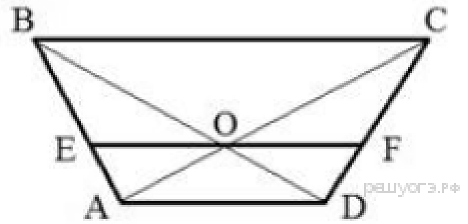
9. Прямая, параллельная основаниям AD и BC трапеции ABCD, проходит через точку пересечения диагоналей трапеции и пересекает ее боковые стороны AB и CD в точках E и F соответственно. Найдите длину отрезка EF, если $AD = 10$ см, $BC = 15$ см.

Решение.

1) $\Delta BOC \sim \Delta AOD$ по двум углам:

а) $\angle BOC = \angle DOA$ как вертикальные;

б) $\angle CBO = \angle ADO$ как внутренние накрест лежащие углы при $< BC||AD$ и секущей BD.



$$\frac{BO}{DO} = \frac{CO}{AO} = \frac{BC}{AD} = \frac{15}{10} = 1,5$$

$$BO = 1,5DO;\ CO = 1,5AO;$$

2) $\Delta EBO \sim \Delta ABD$ по двум углам:

а) $\angle B$ — общий;

б) $\angle BEO = \angle BAD$ как соответственные углы при $EO||AD$ и секущей AB.

$$\frac{EO}{AD} = \frac{BO}{BD} = \frac{BO}{BO+DO} = \frac{1,5DO}{1,5DO+DO} = \frac{1,5DO}{2,5DO} = \frac{3}{5};$$

$$EO = \frac{3}{5}AD = 6 \text{ см};$$

3) $EO = FO$;

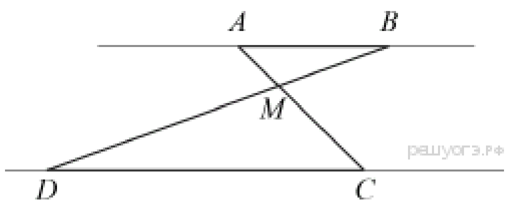
4) $EF = 12$ см.

Ответ: 12 см.

10. Отрезки AB и DC лежат на параллельных прямых, а отрезки AC и BD пересекаются в точке M. Найдите MC, если $AB = 13$, $DC = 65$, $AC = 42$.

Решение.

Углы DCM и BAM равны как накрест лежащие, углы DMC и BMA равны как вертикальные, следовательно, треугольники DMC и BMA подобны по двум углам.



Значит, $\frac{AM}{MC} = \frac{AB}{CD} = \frac{13}{65} = 0,2.$ Следовательно,

$$AC = AM + MC = 0,2MC + MC = 1,2MC.$$

Откуда $MC = \frac{AC}{1,2} = 35.$

Ответ: 35.