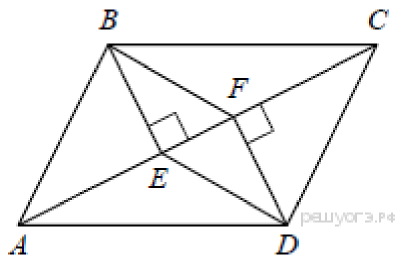
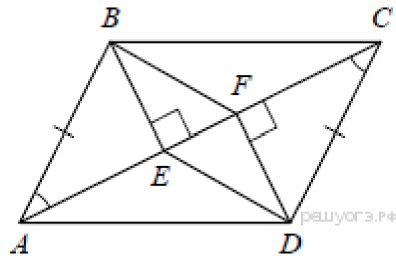
# Четырёхугольники и их элементы

**1.** В параллелограмме $ABCD$ проведены перпендикуляры $BE$ и $DF$ к диагонали $AC$ (см. рисунок). Докажите, что $BFDE$ — параллелограмм.

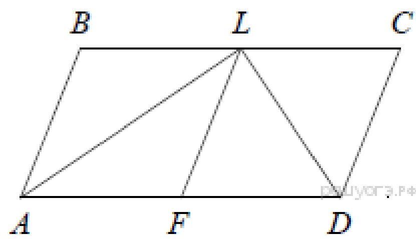



**Решение.**
Прямоугольные треугольники $ABE$ и $CDF$ равны по гипотенузе и острому углу ($AB = CD$ как противолежащие стороны параллелограмма; $\angle BAE = \angle DCF$ как накрест лежащие углы при параллельных прямых $AB$ и $CD$ и секущей $AC$). Следовательно, $BE = DF$. Кроме того, $BE \parallel DF$, т. к. это перпендикуляры к одной прямой. Таким образом, в четырёхугольнике $BFDE$ противолежащие стороны равны и параллельны, поэтому $BFDE$ — параллелограмм.



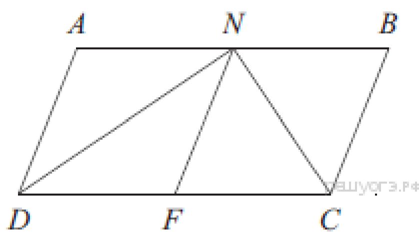

**2.** Сторона $BC$ параллелограмма $ABCD$ вдвое больше стороны $CD$. Точка $L$ — середина стороны $BC$. Докажите, что $DL$ — биссектриса угла $CDA$.

**Решение.**
Проведём $LF$ параллельно $CD$ (см. рис.). Тогда $BL = LC = CD$. Следовательно, параллелограмм $CDFL$ является ромбом. Диагональ $DL$ ромба $CDFL$ является биссектрисой угла $CDA$.



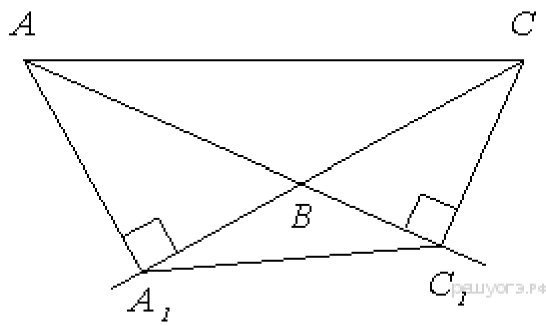

**3.** Сторона $AB$ параллелограмма $ABCD$ вдвое больше стороны $BC$. Точка $N$ — середина стороны $AB$. Докажите, что $CN$ — биссектриса угла $BCD$.

**Решение.**
Проведём $FN$ параллельно $BC$ (см. рис.). Тогда $AD = AN = NB$. Следовательно, параллелограмм $BCFN$ является ромбом. Диагональ $CN$ ромба $BCFN$ является биссектрисой угла $BCD$.




**4.** В треугольнике $ABC$ с тупым углом $ABC$ проведены высоты $AA_1$ и $CC_1$. Докажите, что треугольники $A_1BC_1$ и $ABC$ подобны.

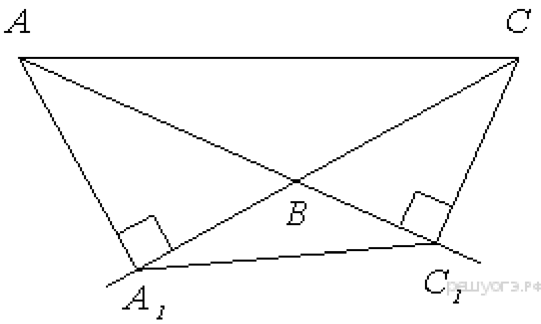
**Решение.**
Поскольку угол $ABC$ тупой, основания высот будут лежать на продолжениях сторон. Так как диагонали четырёхугольника $AA_1C_1C$ пересекаются, он выпуклый, а поскольку $\angle AA_1C = \angle AC_1C = 90^\circ$, около него можно описать окружность. Тогда $\angle AC_1A_1 = \angle ACA_1$ как вписанные углы, опирающиеся на дугу $CC_1$, а $\angle CA_1C_1 = \angle CAC_1$ как вписанные углы, опирающиеся на дугу $CC_1$. Значит, указанные треугольники подобны по двум углам.



**5.** В треугольнике $ABC$ с тупым углом $ABC$ проведены высоты $AA_1$ и $CC_1$. Докажите, что треугольники $A_1BC_1$ и $ABC$ подобны.

**Решение.**

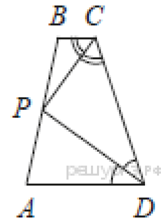
Поскольку угол $ABC$ тупой, основания высот будут $A_1$ и $B_1$ лежать на продолжениях сторон $BC$ и $AC$ соответственно. Так как диагонали четырёхугольника $AA_1C_1C$ пересекаются, он выпуклый, а поскольку $\angle AA_1C = \angle CBC_1 = 90^\circ$, около четырёхугольника $AA_1C_1C$ можно описать окружность. Тогда углы $\angle CAC_1$ и $\angle CA_1C_1$ равны как вписанные углы, опирающиеся на дугу $A_1C_1$, Аналогично, равны углы $ACA_1$ и $A_1C_1A$. Значит, указанные треугольники подобны по двум углам.




**6.** Биссектрисы углов $C$ и $D$ трапеции $ABCD$ пересекаются в точке $P$, лежащей на стороне $AB$. Докажите, что точка $P$ равноудалена от прямых $BC$, $CD$ и $AD$.

**Решение.**

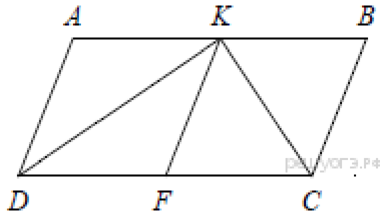
По свойству биссектрисы угла точка $P$ равноудалена от прямых $AD$ и $CD$ (так как лежит на биссектрисе угла $D$ ) и равноудалена от прямых $BC$ и $CD$ (так как лежит на биссектрисе угла $C$). Значит, точка $P$ равноудалена от всех трёх указанных прямых.




**7.** Сторона $AB$ параллелограмма $ABCD$ вдвое больше стороны $AD$. Точка $K$ — середина стороны $AB$. Докажите, что $DK$ — биссектриса угла $ADC$.

**Решение.**

Проведём $FK$ параллельно $AD$ (см. рис.). Имеем $AD = AK = KB$, следовательно, параллелограмм $AKFD$ является ромбом. Диагональ $DK$ ромба $AKFD$ является биссектрисой угла $ADC$.

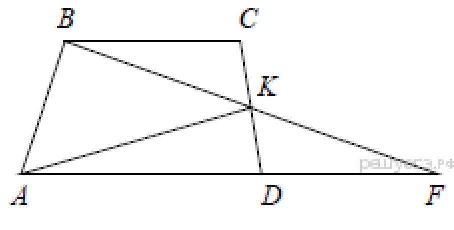



**8.** Точка $K$ — середина боковой стороны $CD$ трапеции $ABCD$. Докажите, что площадь треугольника $KAB$ равна половине площади трапеции.

**Решение.**

Продолжим $BK$ до пересечения с прямой $AD$ в точке $F$. Заметим, что в треугольниках $FDK$ и $BCK$ стороны $CK$ и $DK$ равны по условию, углы при вершине K равны как вертикальные, а углы $KDF$ и $KCB$ равны как накрест лежащие. Значит, треугольники $FDK$ и $BCK$ равны.

Следовательно, их площади равны, то есть площадь трапеции равна площади треугольника $ABF$. Но из равенства треугольников также вытекает, что $FK = BK$, то есть $AK$ — медиана в треугольнике $ABF$. Тогда треугольник $KAB$ по площади составит половину треугольника $FAB$, а значит, и данной трапеции.

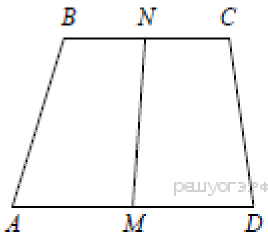



**9.** Докажите, что отрезок, соединяющий середины оснований трапеции, делит её на две равные по площади части.

**Решение.**

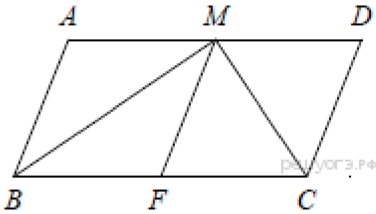
Пусть $ABCD$ — трапеция, $M$ и $N$ — середины оснований $AD$ и $BC$ соответвенно.

Пусть $AM = MD = a$ и $BN = NC = b$, а $h$ — высота трапеции. Тогда площадь каждой из частей, на которые отрезок $MN$ делит трапецию, равна $h \cdot \dfrac{a+b}{2}$, то есть, эти части равновелики.

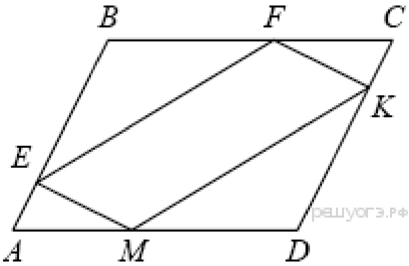



**10.** Сторона $AD$ параллелограмма $ABCD$ вдвое больше стороны $CD$. Точка $M$ — середина стороны $AD$. Докажите, что $CM$ — биссектриса угла $BCD$.

**Решение.**
Проведём $FM$ параллельно $AB$ (см. рисунок). Тогда $CD = AM = MD$. Следовательно, параллелограмм $DCFM$ является ромбом. Диагональ $CM$ ромба $DCFM$ является биссектрисой угла $BCD$.



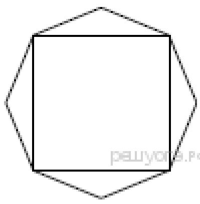

**11.** В параллелограмме $ABCD$ точки $E$, $F$, $K$ и $M$ лежат на его сторонах, как показано на рисунке, причём $AE = CK$, $BF = DM$. Докажите, что $EFKM$ — параллелограмм.




**Решение.**

Так как в параллелограмме противоположные стороны равны и по условию известно, что $AE = CK$, $BF = DM$, то $BE = KD$, $CF = AM$. В параллелограмме противоположные углы равны, то треугольники EBF и KDM, FCK и MAE равны по двум сторонам и углу между ними. Из равенства треугольников следует, что EF=MK, EM=FK. Так как противоположные стороны четырехугольника EFKM равны, то по признаку параллелограмма это четырехугольника- параллелограмм.

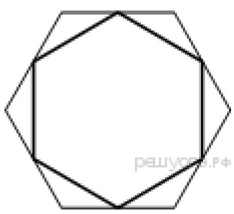
**12.** Дан правильный восьмиугольник. Докажите, что если его вершины последовательно соединить отрезками через одну, то получится квадрат.



**Решение.**

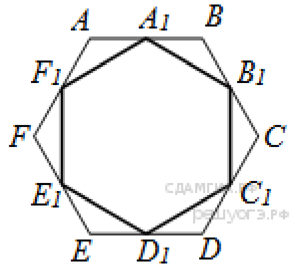
Вычислим угол восьмиугольника по формуле $\frac{n-2}{n} \cdot 180°$. Таким образом, угол восьмиугольника равен $135°$. Если вершины последовательно соединить отрезками через одну, то образуются четыре равных равнобедренных треугольника, углы при основании которых равны $22,5°$. Тогда угол между двумя отрезками, которые соединяют вершины равен $90°$. Поскольку все четыре равнобедренных треугольника равны, то и стороны получившегося четырёхугольника равны. Таким образом, если вершины восьмиугольника последовательно соединить отрезками через одну, то получится квадрат.

**13.** Дан правильный шестиугольник. Докажите, что если последовательно соединить отрезками середины его сторон, то получится правильный шестиугольник.



**Решение.**

Рассмотрим маленькие треугольники $F_1AA_1$ и $A_1BB_1$, $F_1A = A_1B$, $AA_1 = BB_1$, $\angle A = \angle B = 120^\circ$, следовательно, эти треугольники равны по двум сторонам и углу. Аналогично равны между собой и остальные маленькие треугольники. Следовательно $A_1B_1 = B_1C_1 = C_1D_1 = D_1E_1 = E_1F_1 = F_1A_1$.




Любой угол правильного шестиугольника равен $\dfrac{180^\circ \cdot (6-2)}{6} = 120^\circ$. Треугольники $F_1AA_1$ и $A_1BB_1$ — равнобедренные, углы при основаниях равны $\dfrac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$. Рассмотрим развёрнутый угол $FF_1A$:

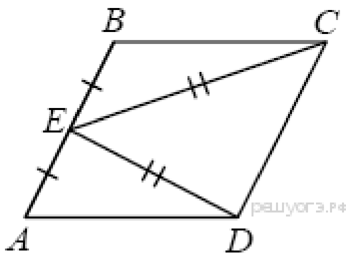
$$180^\circ = \angle FF_1E_1 + \angle E_1F_1A_1 + \angle AF_1A_1 \Leftrightarrow \angle E_1F_1A_1 = 180^\circ - \angle FF_1E_1 - \angle AF_1A_1 = 180^\circ - 30^\circ - 30^\circ = 120^\circ.$$

Аналогично все остальные углы шестиугольника $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ равны $120^\circ$, следовательно шестиугольник $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — правильный.

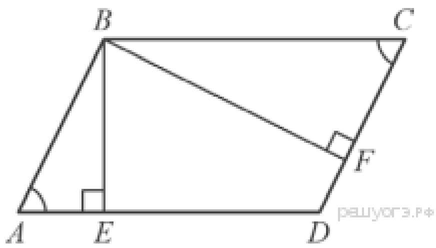
**14.** В параллелограмме $ABCD$ точка $E$ — середина стороны $AB$. Известно, что $EC=ED$. Докажите, что данный параллелограмм — прямоугольник.

**Решение.**

Треугольники $BEC$ и $AED$ равны по трём сторонам. Значит, углы $CBE$ и $DAE$ равны. Так как их сумма равна $180^\circ$, то углы равны $90^\circ$. Такой параллелограмм — прямоугольник.



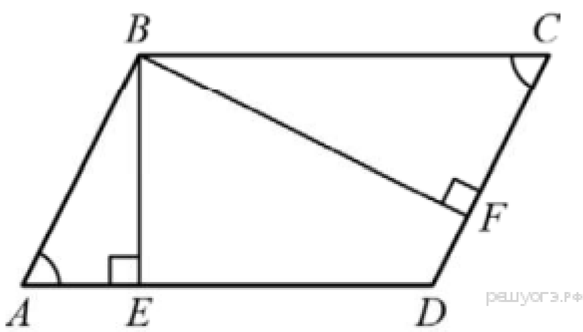

**15.** В параллелограмме $ABCD$ проведены высоты $BE$ и $BF$. Докажите, что $\Delta ABE$ подобен $\Delta CBF$.




**Решение.**

В треугольниках $ABE$ и $CBF$ имеем $\angle A = \angle C$ как противоположные углы параллелограмма, $\angle BEA = \angle CFB$ как прямые углы, значит треугольники подобны по первому признаку подобия треугольников.

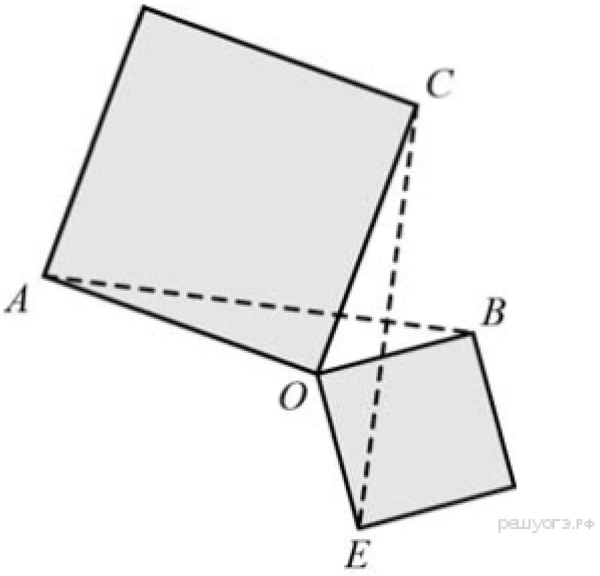
**16.** В параллелограмме $ABCD$ проведены высоты $BE$ и $BF$. Докажите, что $\Delta\ ABE$ подобен $\Delta\ CBF$.




**Решение.**

В треугольниках $ABE$ и $CBF$ имеем $\angle A = \angle C$ как противоположные углы параллелограмма, $\angle BEA = \angle CFB$ как прямые углы, значит треугольники подобны по первому признаку подобия треугольников.

**17.** Два квадрата имеют общую вершину. Докажите, что отмеченные на рисунке отрезки $AB$ и $CE$ равны.




**Решение.**

Пусть общая вершина квадратов — точка $O$. $AO \perp OC$ и $BO \perp OE$. Следовательно, $\angle AOB = \angle COE$. Тогда треугольники $AOB$ и $COE$ равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, $AB = CE$ как соответствующие стороны равных треугольников.

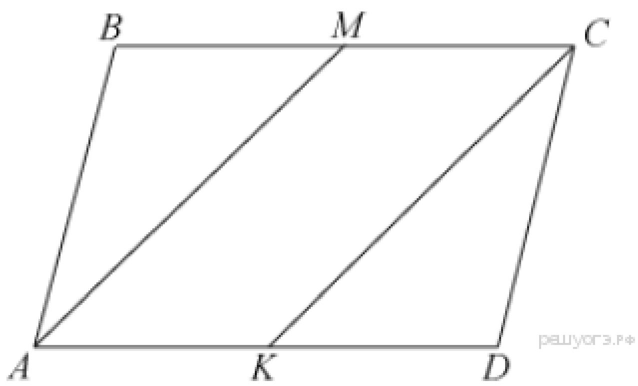
**18.** В параллелограмме проведены биссектрисы противоположных углов. Докажите, что отрезки биссектрис, заключенные внутри параллелограмма, равны.

**Решение.**

$ABCD$ — параллелограмм

$AM$ — биссектриса $\angle A$, $CK$ — биссектриса $\angle C$
.

Докажите, что $AM = CK$.




1) $\Delta AMB = \Delta CKD$ по стороне и двум прилежащим к ней углам:

а) $AB = CD$ — по свойству противоположных сторон параллелограмма;

б) $\angle ABM = \angle KDC$ по свойству противоположных углов параллелограмма;

в) $\angle BAM = \angle KCD$ по определению биссектрисы и равенству противоположных углов параллелограмма.

2) $KC = MA$ как соответствующие элементы равных треугольников.

**19.** Середины сторон параллелограмма является вершинами ромба. Докажите, что данный параллелограмм — прямоугольник.

**Решение.**

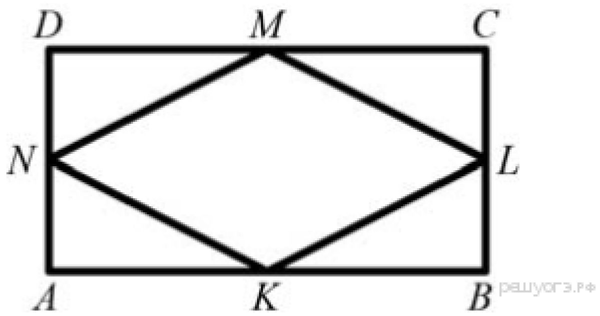
Пусть точки $K$, $L$, $M$, $N$ — середины сторон $AB$, $BC$, $CD$ и $DA$ параллелограмма $ABCD$ соответственно

1) $BL = CL$ т. к. $L$ — середина $BC$;

2) $KB = MC$, т. к. $AB = CD$ как противоположные стороны параллелограмма, а $K$ и $M$ — середины этих сторон;

3) $KL = ML$ как стороны ромба.

Тогда треугольники $KBL$ и $LCM$ равны по трем сторонам. Это означает, что угол $KBL$ равен углу $MCL$. Но эти углы в сумме дают 180°, поэтому каждый из них равен 90°. Таким образом, углы параллелограмма прямые. Значит, он прямоугольник.

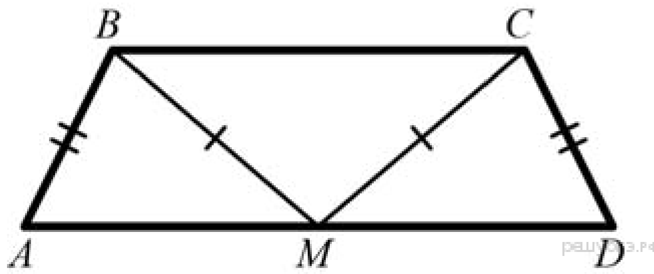



**20.** Дана равнобедренная трапеция $ABCD$. Точка $M$ лежит на основании $AD$ и равноудалена от концов другого основания. Докажите, что $M$ — середина основания $AD$.

**Решение.**

Треугольник $BMC$ равнобедренный. Поэтому $\angle CBM = \angle BCM$. В равнобедренной трапеции $\angle ABC = \angle DCB$.

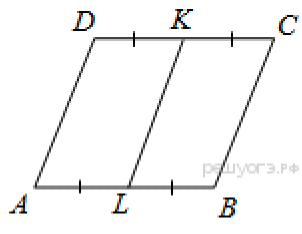
Отсюда следует, что $\angle ABM = \angle DCM$. Значит, треугольники $BMA$ и $CMD$ равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, $AM = MD$.




**21.** Три стороны параллелограмма равны. Докажите, что отрезок с концами в серединах противоположных сторон параллелограмма равен четверти его периметра.

**Решение.**

В параллелограмме противоположные стороны равны, поэтому если равны три стороны, то все стороны этого параллелограмма равны, значит, это ромб. Отрезки $AL$ и $DK$ равны и параллельны, следовательно, $ADKL$ — параллелограмм, значит, длина $KL$ равна длине стороны $AD$ и, следовательно, равна четверти периметра параллелограмма.

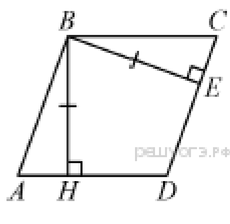



**22.** В параллелограмме $ABCD$ проведены высоты $BH$ и $BE$ к сторонам $AD$ и $CD$ соответственно, при этом $BH = BE$. Докажите, что $ABCD$ — ромб.

**Решение.**

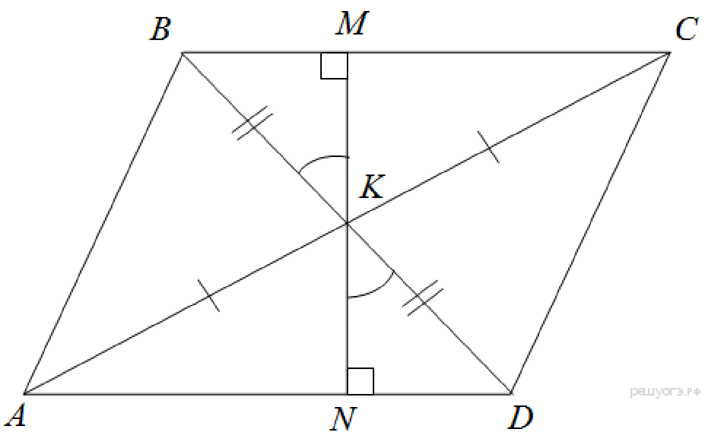
Площадь параллелограмма равна произведению стороны на высоту, проведенную к этой стороне.

Тогда, с одной стороны, $S = AD \cdot BH$, а с другой стороны, $S = CD \cdot BE$. Поскольку $BH = BE$ , получаем, что $AD = CD$. Следовательно, все стороны параллелограмма равны, а значит, $ABCD$ — ромб.



**23.** В параллелограмме $ABCD$ диагонали $AC$ и $BD$ пересекаются в точке $K$. Докажите, что площадь параллелограмма $ABCD$ в четыре раза больше площади треугольника $AKD$.

**Решение.**




Проведём высоту $MN$ так, чтобы она проходила через точку $K$. Углы $BKM$ и $NKD$ равны друг другу как вертикальные. Вспомним также, что диагонали делятся точкой пересечения пополам, следовательно, $BK = KD$. Рассмотрим треугольники $BMK$ и $KDN$, они прямоугольные, имеют равные углы и равные гипотенузы, следовательно эти треугольники равны, а значит равны отрезки $MK$ и $KN$. Таким образом, $MK = KN = \frac{1}{2}MN$.

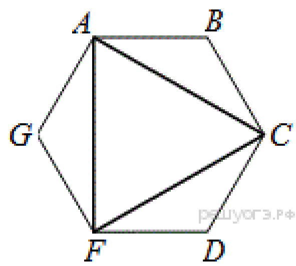
Площадь параллелограмм равна $S_{ABCD} = AD \cdot MN$, а площадь треугольника $AKD$:

$$S_{AKD} = \frac{1}{2}AD \cdot KN = \frac{1}{2}AD \cdot \frac{1}{2}MN = \frac{S_{ABCD}}{4}.$$

**24.** Дан правильный шестиугольник. Докажите, что если его вершины последовательно соединить отрезками через одну, то получится равносторонний треугольник.

**Решение.**

Рассмотрим треугольники $ABC$, $CDF$, $FGA$, $AB = BC = CD = DF = FG = GA$ $\angle B = \angle D = \angle G$, следовательно эти треугольники равны по двум сторонам и углу между ними, значит, $AF = AC = CF$, то есть треугольник $ACF$ — правильный.

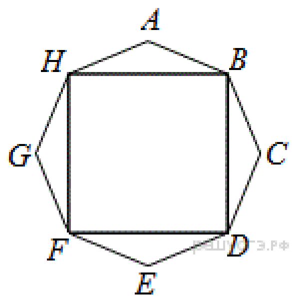



**25.** Дан правильный восьмиугольник. Докажите, что если его вершины последовательно соединить отрезками через одну, то получится квадрат.

**Решение.**

Рассмотрим треугольники $HAB$, $BCD$, $DFE$, $FGH$:

$$AH = AB = BC = CD = DE = FE = FG = GH, \ \angle A = \angle C = \angle E = \angle G,$$




следовательно эти треугольники равны, то есть $HB = BD = DF = FH$, следовательно $FHBD$ — ромб.

Любой угол правильного восьмиугольника равен $\frac{180° \cdot (8-2)}{8} = 135°$. Каждый их треугольников $HAB$, $BCD$, $DFE$, $FGH$ — равнобдеренный, следовательно углы при основании этих треугольников равны $\frac{180° - 135°}{2} = 22{,}5°$.

Рассмотрим угол $GHA$:

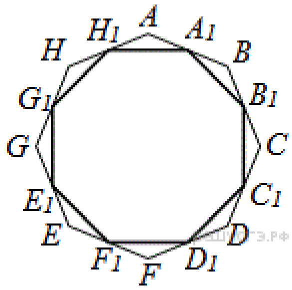
$$\angle GHA = \angle GHF + \angle FHB + \angle AHB \Leftrightarrow \angle FHB = \angle GHA - \angle GHF - \angle AHB \Leftrightarrow \angle FHB = 135° - 22{,}5° - 22{,}5° = 90°.$$

Следовательно все углы, в ромбе $FHBD$ — прямые, а значит, $FHBD$ — квадрат.

**26.** Дан правильный восьмиугольник. Докажите, что если последовательно соединить отрезками середины его сторон, то получится правильный восьмиугольник.

**Решение.**

Рассмотрим маленькие треугольники $H_1AA_1$ и $A_1BB_1$, $H_1A = A_1B$, $AA_1 = BB_1$, $\angle A = \angle B = 135^\circ$, следовательно, эти треугольники равны по двум сторонам и углу. Аналогично равны между собой и остальные маленькие треугольники. Следовательно $A_1B_1 = B_1C_1 = C_1D_1 = D_1E_1 = E_1F_1 = F_1E_1 = E_1G_1 = G_1H_1 = H_1A_1$.



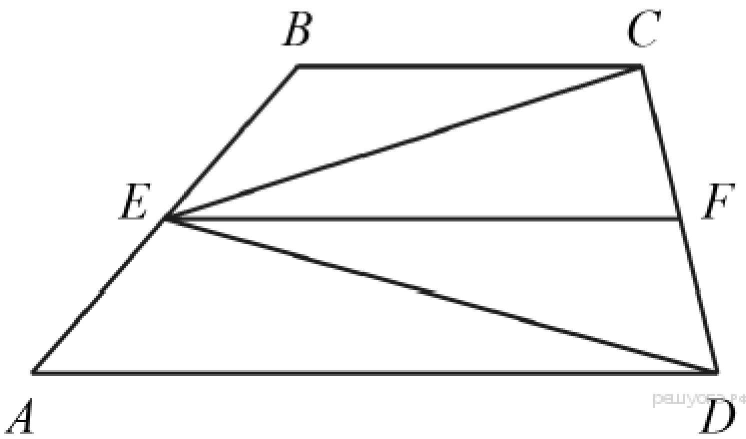

Любой угол правильного восьмиугольника равен $\dfrac{180^\circ\cdot(8-2)}{8} = 135^\circ$. Треугольники $H_1AA_1$ и $A_1BB_1$ — равнобедренные, углы при основаниях равны $\dfrac{180^\circ - 135^\circ}{2} = 22,5^\circ$. Рассмотрим развёрнутый угол $AA_1B$ :

$$180^\circ = \angle AA_1H_1 + \angle H_1A_1B_1 + \angle BA_1B_1 \Leftrightarrow \angle H_1A_1B_1 = 180^\circ -{}_1H_1 - \angle BA_1B_1 = 180^\circ - 22,5^\circ - 22,5^\circ = 135^\circ.$$

Аналогично все остальные углы восьмиугольника $A_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1H_1$ равны $135^\circ$, следовательно восьмиугольник $A_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1H_1$ — правильный.

**27.** Точка $E$ — середина боковой стороны $AB$ трапеции $ABCD$. Докажите, что площадь треугольника $ECD$ равна половине площади трапеции.

**Решение.**

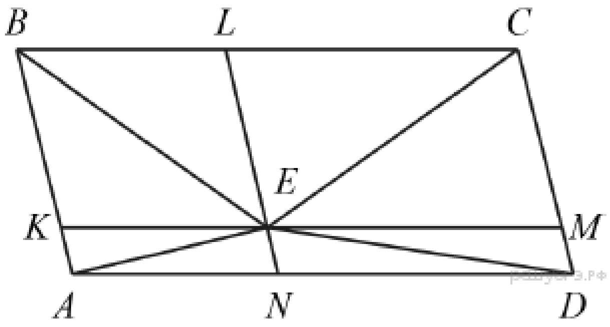



Проведём отрезок $EF$ параллельно основаниям трапеции, точка $F$ лежит на стороне $CD$. Отрезок $EF$ — средняя линия трапеции $ABCD$, значит, высоты треугольников $EFD$ и $CEF$ , проведённые к стороне $EF$ , равны между собой и равны половине высоты трапеции $h$. Имеем

$$S_{CED} = S_{EFD} + S_{EFC} = \frac{1}{2}\cdot\frac{h}{2}\cdot EF + \frac{1}{2}\cdot\frac{h}{2}\cdot EF =$$
$$= \frac{1}{2}h\cdot EF = \frac{1}{2}h\cdot\frac{1}{2}(AD+BC) = \frac{1}{2}S_{ABCD}.$$

**28.** Внутри параллелограмма $ABCD$ выбрали произвольную точку $E$. Докажите, что сумма площадей треугольников $BEC$ и $AED$ равна половине площади параллелограмма.

**Решение.**




Проведём через точку $E$ прямые, параллельные сторонам параллелограмма, пересекающие его стороны $AB$, $BC$ , $CD$ и $AD$ в точках $K$ , $L$, $M$ и $N$ соответственно. Эти прямые делят параллелограмм $ABCD$ на четыре параллелограмма. Поскольку диагональ делит параллелограмм на два равных треугольника, получаем

$$S_{BEC}+S_{AED}=S_{BEL}+S_{LEC}+S_{AEN}+S_{EDN}=$$
$$=\frac{1}{2}S_{BLEK}+\frac{1}{2}S_{LCME}+\frac{1}{2}S_{ANEK}+\frac{1}{2}S_{NEMD}=$$
$$=\frac{1}{2}(S_{BLEK}+S_{LCME}+S_{ANEK}+S_{NEMD}=\frac{1}{2}S_{ABCD}.$$

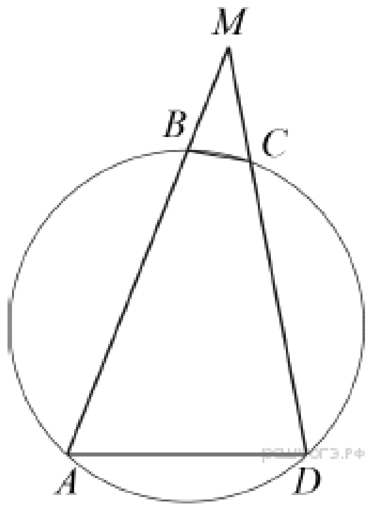
**29.** Известно, что около четырёхугольника $ABCD$ можно описать окружность и что продолжения сторон $AB$ и $CD$ четырёхугольника пересекаются в точке $M$. Докажите, что треугольники $MBC$ и $MDA$ подобны.

**Решение.**
Поскольку четырёхугольник $ABCD$ вписанный, сумма углов $BAD$ и $BCD$ равна 180°.

Следовательно,

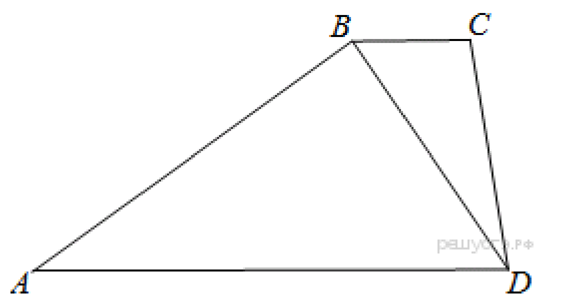
$$\angle MCB = 180° - \angle BCD = \angle BAD.$$

Получаем, что в треугольниках $MBC$ и $MDA$ углы $MCB$ и $MAD$ равны, угол $M$ общий, следовательно, эти треугольники подобны.



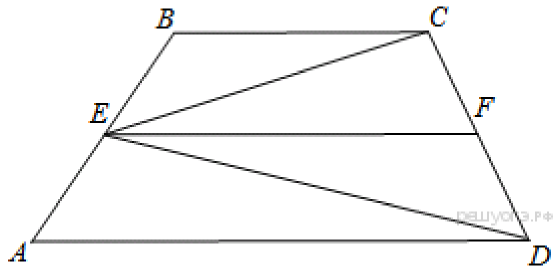

**30.** Основания $BC$ и $AD$ трапеции $ABCD$ равны соответственно 5 и 20, $BD$ = 10. Докажите, что треугольники $CBD$ и $ADB$ подобны.

**Решение.**
Углы $CBD$ и $BDA$ равны, как накрест лежащие при параллельных прямых. В треугольниках $CBD$ и $ADB$ : $\frac{BC}{BD}=\frac{BD}{AD}$, следовательно, эти треугольники подобны по двум парам подобных сторон и углу между ними.




**31.** Точка $E$ — середина боковой стороны $AB$ трапеции $ABCD$. Докажите, что площадь треугольника $ECD$ равна половине площади трапеции.

**Решение.**
Проведём построения и введём обозначения как указано на рисунке. Проведём $EF$ параллельно $AD$. Поскольку $BC \parallel EF \parallel AD$ и $AE = EB$ по теореме Фаллеса получаем, что $CF = FD$. Следовательно, $EF$ — средняя линия. Пусть $h$ — длина высоты трапеции. Площадь трапеции равна:




$$S_{ABCD} = S_{EBC} + S_{ECD} + S_{AED} = \frac{1}{2}\cdot\frac{h}{2}BC + S_{ECD} + \frac{1}{2}\cdot\frac{h}{2}AD = S_{ECD} + \frac{1}{2}\cdot\frac{AD+BC}{2}h = S_{ECD} + \frac{1}{2}S_{ABCD}.$$

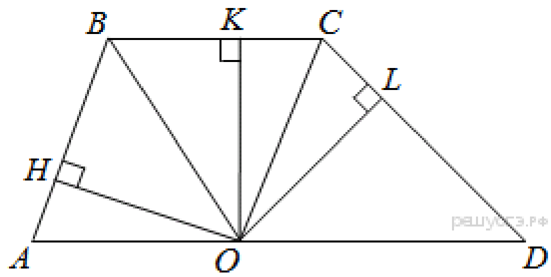
Откуда получаем, что $S_{ECD} = \dfrac{1}{2}S_{ABCD}$.

**32.** Биссектрисы углов $B$ и $C$ трапеции $ABCD$ пересекаются в точке $O$, лежащей на стороне $AD$. Докажите, что точка $O$ равноудалена от прямых $AB$, $BC$ и $CD$.

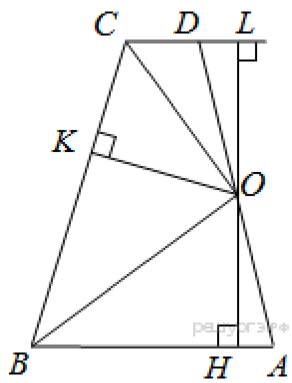
**Решение.**

В задаче возможны два случая.

Первый случай, $AD$ — одно из оснований. Проведём построения и введём обозначения как указано на рисунке. Рассмотрим треугольники $OBH$ и $BOK$ Рассмотрим треугольники $OBH$ и $OBK$, они прямоугольные, углы $HBO$ и $KBO$ равны, $OB$ — общая, следовательно, треугольники равны. Откуда $OH = OK$. Аналогично из треугольников $KOC$ и $COL$ получаем, что $OK = OL$. Таким образом, $OH = OK = OL$.

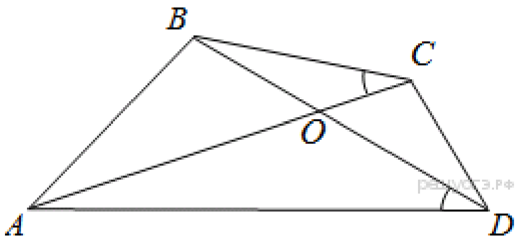



Второй случай, $AD$ — одна из боковых сторон. Несмотря на другую геометрическую конфигурацию, доказательство полностью повторяет доказательство для первого случая.



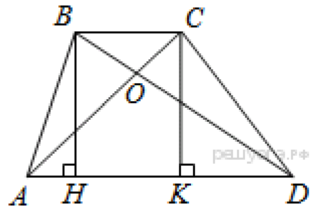

**33.** В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ углы $BCA$ и $BDA$ равны. Докажите, что углы $ABD$ и $ACD$ также равны.

**Решение.**
Проведём построения и введём обозначения как показано на рисунке. Рассмотрим треугольники $BOC$ и $AOD$, углы $BCA$ и $BDA$ равны по условию, углы $BOC$ и $AOD$ равны как вертикальные, следовательно, треугольники $BOC$ и $AOD$ подобны. Откуда $\dfrac{AO}{OB} = \dfrac{OD}{OC} = \dfrac{AD}{BC}$. Равенство $\dfrac{AO}{OB} = \dfrac{OD}{OC}$ можно представить в виде $\dfrac{AO}{OD} = \dfrac{OB}{OC}$. Рассмотрим треугольники $ABO$ и $COD$, углы $AOB$ и $COD$ равны как вертикальные и имеется равенство $\dfrac{AO}{OD} = \dfrac{OB}{OC}$, следовательно, треугольники подобны. Поэтому углы $ABD$ и $ACD$ равны.




**34.** В трапеции $ABCD$ с основаниями $AD$ и $BC$ диагонали пересекаются в точке $O$. Докажите, что площади треугольников $AOB$ и $COD$ равны.

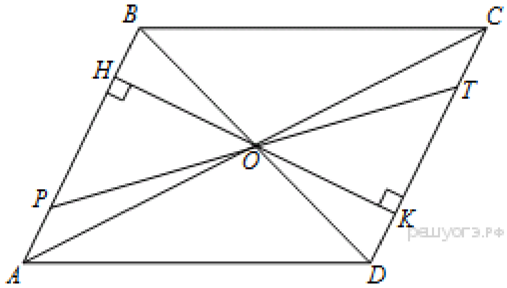
**Решение.**
Проведём высоты $BH$ и $CK$, они равны. Площадь треугольника $ABD$ равна $\frac{1}{2}AD \cdot BH$. Площадь треугольника $CAD$ равна $\frac{1}{2}AD \cdot CK$. Поскольку высоты $BH$ и $CK$ равны, равны и площади треугольников $ABD$ и $CAD$. Покажем, что площади треугольников $AOB$ и $COD$ равны:




$$S_{AOB} = S_{ABD} - S_{AOD} = S_{CAD} - S_{AOD} = S_{COD}.$$

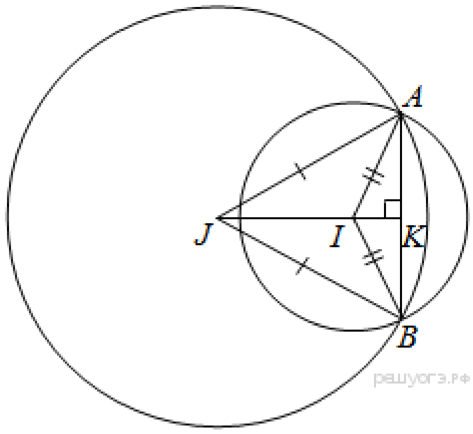
**35.** Через точку $O$ пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, пересекающая стороны $AB$ и $CD$ в точках $P$ и $T$ соответственно. Докажите, что $BP = DT$.

**Решение.**
Проведём через точку $O$ прямую $HK$, перпендикулярную стороне $AB$. Поскольку стороны $AB$ и $CD$ параллельны, $HK$ также перпендикулярно и стороне $CD$. Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам. Рассмотрим треугольники $AOB$ и $COD$, $BO$ равно $OD$, $AO$ равно $OC$, углы $AOB$ и $COD$ равны как вертикальные, следовательно, треугольники равны. Поэтому равны их соответствующие элементы, то есть $OH = OK$. Рассмотрим треугольники $OPH$ и $OKT$, они прямоугольные, $OH$ равно $OK$, углы $POH$ и $KOT$ равны как вертикальные, следовательно, треугольники равны, поэтому $OP$ равно $OT$. Рассмотрим треугольники $BOP$ и $TOD$, $OP$ равно $OT$, $OB$ равно $OD$, углы $POB$ и $TOD$ равны как вертикальные.



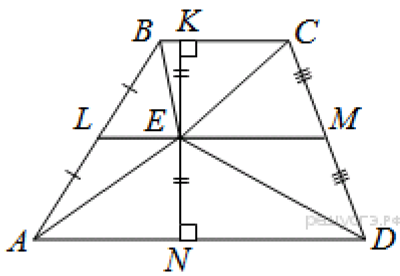

**36.** Окружности с центрами в точках $I$ и $J$ пересекаются в точках $A$ и $B$, причём точки $I$ и $J$ лежат по одну сторону от прямой $AB$. Докажите, что $AB \perp IJ$.

**Решение.**
Проведём медиану $JK$. Стороны $AJ$ и $BJ$ равны как радиусы окружности, поэтому треугольник $ABJ$ — равнобедренный, следовательно, медиана $JK$ является также высотой. Проведём медиану $IM$. Стороны $AI$ и $BI$ равны как радиусы окружности, поэтому треугольник $ABI$ — равнобедренный, следовательно, медиана $IK$ является также высотой. прямые $JK$ и $IK$ перпендикулярны одной и той же прямой $AB$, следовательно они параллельны. Эти прямые проходят через одну и ту же точку $M$, значит, они совпадают. Таким образом прямая $AB$ перпендикулярна прямой $IJ$.




**37.** На средней линии трапеции $ABCD$ с основаниями $AD$ и $BC$ выбрали произвольную точку $E$. Докажите, что сумма площадей треугольников $BEC$ и $AED$ равна половине площади трапеции.

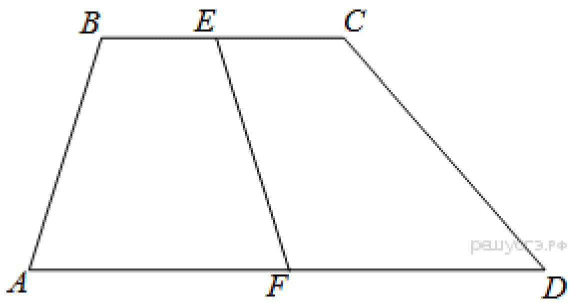
**Решение.**
Введём обозначения как показано на рисунке. Проведём высоту $KN$ через точку $E$. Поскольку $LM$ — средняя линия, $LM \parallel AD \parallel BC$. Отрезки $AL$ и $BL$ равны, следовательно, по теореме Фалеса, $KE = EN$. Площадь треугольника $BCE$ равна $\frac{1}{2}BC \cdot KE$. Площадь треугольника $AED$ равна $\frac{1}{2}AD \cdot EN$. Найдём сумму площадей этих треугольников:




$$S_{BEC} + S_{AED} = \frac{1}{2}BC \cdot KE + \frac{1}{2}AD \cdot EN = \frac{1}{2}BC \cdot EN + \frac{1}{2}AD \cdot EN = \frac{AD+BC}{2}EN = \frac{AD+BC}{2} \cdot \frac{KN}{2} = \frac{S_{ABCD}}{2}.$$

**38.** Докажите, что отрезок, соединяющий середины оснований трапеции, делит её на две равные по площади части.

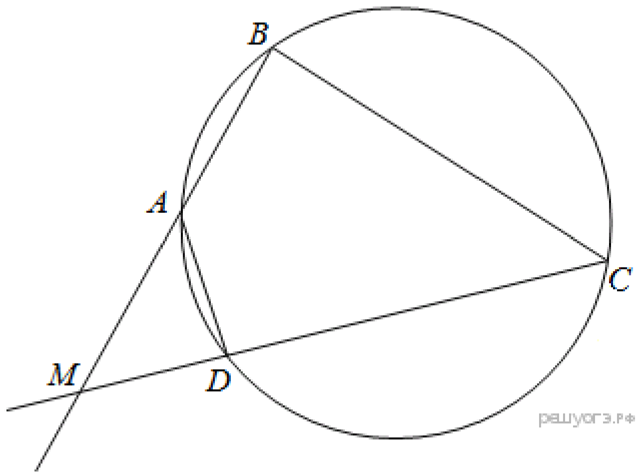
**Решение.**
Проведём построения и введём обозначения как показано на рисунке. Пусть $h$ — длина высоты трапеции. Площадь треугольника $ABF$ равна площади треугольника $FCD$, поскольку высоты, проведённые к основаниям $AF$ и $FD$ равны, а основания $AF$ и $FD$ равны. Аналогично равны площади треугольников $BEF$ и $ECF$. Покажем, что площади четырёхугольников $ABEF$ и $FECD$ равны:




$$S_{ABEF} = S_{ABF} + S_{BEF} = S_{FCD} + S_{ECF} = S_{FECD}.$$

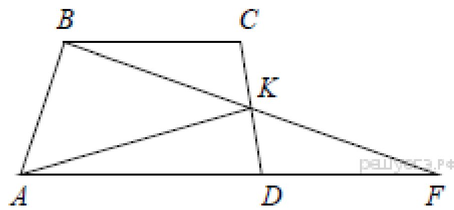
**39.** Известно, что около четырёхугольника $ABCD$ можно описать окружность и что продолжения сторон $AB$ и $CD$ четырёхугольника пересекаются в точке $M$. Докажите, что треугольники $MBC$ и $MDA$ подобны.

**Решение.**
Четырёхугольник можно вписать в окружность тогда и только тогда, когда сумма противоположных углов равна 180°, поэтому $\angle DAB + \angle BCD = 180°$. Углы $MAD$ и $DAB$ образуют развёрнутый угол, значит, $\angle MAD + \angle DAB = 180°$. Из приведённых равенств получаем, что $\angle BCD = \angle MAD$. Рассмотри треугольники $MBC$ и $MDA$, угол $M$ — общий, углы $BCD$ и $MAD$ равны, следовательно, треугольники подобны.




**40.** Точка $K$ — середина боковой стороны $CD$ трапеции $ABCD$. Докажите, что площадь треугольника $KAB$ равна половине площади трапеции.

**Решение.**
Продолжим $BK$ до пересечения с прямой $AD$ в точке $F$. Заметим, что в треугольниках $FDK$ и $BCK$ стороны $CK$ и $DK$ равны по условию, углы при вершине K равны как вертикальные, а углы $KDF$ и $KCB$ равны как накрест лежащие. Значит, треугольники $FDK$ и $BCK$ равны.




Следовательно, их площади равны, то есть площадь трапеции равна площади треугольника $ABF$. Но из равенства треугольников также вытекает, что $FK = BK$, то есть $AK$ — медиана в треугольнике $ABF$. Тогда треугольник $KAB$ по площади составит половину треугольника $FAB$, а значит, и данной трапеции.

----------

Дублирует задание 341396

**41.** Внутри параллелограмма $ABCD$ выбрали произвольную точку $F$. Докажите, что сумма площадей треугольников $BFC$ и $AFD$ равна половине площади параллелограмма.

**Решение.**

Проведём через точку $F$ прямые, параллельные сторонам параллелограмма, пересекающие его стороны $AB$, $BC$, $CD$ и $AD$ в точках $K$, $L$, $M$ и $N$ соответственно. Эти прямые делят параллелограмм $ABCD$ на четыре параллелограмма. Поскольку диагональ делит параллелограмм на два равных треугольника, получаем

$$S_{BFC}+S_{AFD}=S_{BFL}+S_{LFC}+S_{AFN}+S_{FDN}=$$
$$=\frac{1}{2}S_{BLFK}+\frac{1}{2}S_{LCMF}+\frac{1}{2}S_{ANFK}+\frac{1}{2}S_{NFMD}=$$
$$=\frac{1}{2}(S_{BLFK}+S_{LCMF}+S_{ANFK}+S_{NFMD}=\frac{1}{2}S_{ABCD}.$$

**42.** В трапеции $ABCD$ с основаниями $AD$ и $BC$ диагонали пересекаются в точке $P$. Докажите, что площади треугольников $APB$ и $CPD$ равны.

**Решение.**

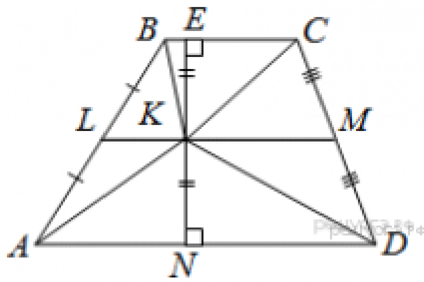
Проведём высоты $BH$ и $CK$, они равны. Площадь треугольника $ABD$ равна $\frac{1}{2}AD\cdot BH$. Площадь треугольника $CAD$ равна $\frac{1}{2}AD\cdot CK$. Поскольку высоты $BH$ и $CK$ равны, равны и площади треугольников $ABD$ и $CAD$. Покажем, что площади треугольников $APB$ и $CPD$ равны:

$$S_{APB}=S_{ABD}-S_{APD}=S_{CAD}-S_{APD}=S_{CPD}.$$

**43.** На средней линии трапеции $ABCD$ с основаниями $AD$ и $BC$ выбрали произвольную точку $K$. Докажите, что сумма площадей треугольников $BKC$ и $AKD$ равна половине площади трапеции.

**Решение.**

Введём обозначения как показано на рисунке. Проведём высоту $EN$ через точку $K$. Поскольку $LM$ — средняя линия, $LM \parallel AD \parallel BC$. Отрезки $AL$ и $BL$ равны, следовательно, по теореме Фалеса, $EK=KN$. Площадь треугольника $BCK$ равна $\frac{1}{2}BC\cdot EK$. Площадь треугольника $AKD$ равна $\frac{1}{2}AD\cdot KN$. Найдём сумму площадей этих треугольников:

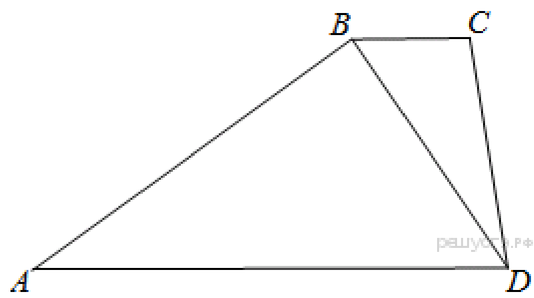



$$S_{BKC}+S_{AKD}=\frac{1}{2}BC\cdot EK+\frac{1}{2}AD\cdot KN=\frac{1}{2}BC\cdot KN+\frac{1}{2}AD\cdot KN=\frac{AD+BC}{2}KN=\frac{AD+BC}{2}\cdot\frac{EN}{2}=\frac{S_{ABCD}}{2}.$$

**44.** Основания $BC$ и $AD$ трапеции $ABCD$ равны соответственно 3 и 12, $BD$ = 6. Докажите, что треугольники $CBD$ и $BDA$ подобны.

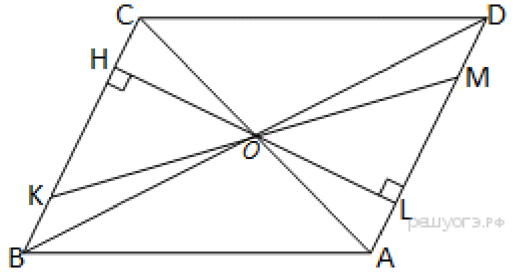
**Решение.**

Углы $CBD$ и $BDA$ равны, как накрест лежащие при параллельных прямых. В треугольниках $CBD$ и $ADB$: $\frac{BC}{BD}=\frac{BD}{AD}$, следовательно, эти треугольники подобны по двум парам подобных сторон и углу между ними.




**45.** Через точку $O$ пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, пересекающая стороны $BC$ и $AD$ в точках $K$ и $M$ соответственно. Докажите, что $BK = DM$.

**Решение.**

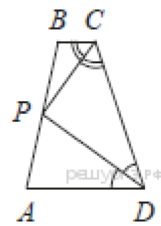



Проведём через точку $O$ прямую $HL$, перпендикулярную стороне $BC$. Поскольку стороны $BC$ и $AD$ параллельны, $HL$ также перпендикулярно и стороне $AD$. Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам. Рассмотрим треугольники $BOC$ и $DOA$, СО равно $OA$, $BO$ равно $OD$, углы $BOC$ и $DOA$ равны как вертикальные, следовательно, треугольники равны. Поэтому равны их соответствующие элементы, то есть $OH = OL$. Рассмотрим треугольники $OKH$ и $OLM$, они прямоугольные, $OH$ равно $OL$, углы КОН и $KOT$ равны как вертикальные, следовательно, треугольники равны, поэтому $OK$ равно $OM$. Рассмотрим треугольники $COK$ и $MOA$, $OK$ равно $OM$, $OC$ равно $OA$, углы $KOC$ и $MOA$ равны как вертикальные. Следовательно, $CK = AM$, а поскольку $ABCD$ - параллелограмм, $BK = DM$

**46.** Биссектрисы углов $C$ и $D$ трапеции $ABCD$ пересекаются в точке $P$, лежащей на стороне $AB$. Докажите, что точка $P$ равноудалена от прямых $BC$, $CD$ и $AD$.

**Решение.**

По свойству биссектрисы угла точка $P$ равноудалена от прямых $AD$ и $CD$ (так как лежит на биссектрисе угла $D$ ) и равноудалена от прямых $BC$ и $CD$ (так как лежит на биссектрисе угла $C$). Значит, точка $P$ равноудалена от всех трёх указанных прямых.



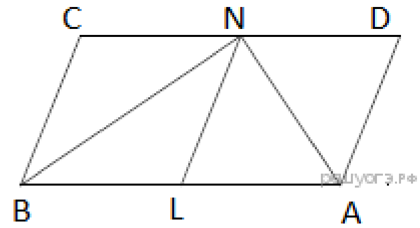

----------

Дублирует задание 341344

**47.** Сторона $CD$ параллелограмма $ABCD$ вдвое больше стороны $AD$. Точка $N$ — середина стороны $CD$. Докажите, что $AN$ — биссектриса угла $BAD$.

**Решение.**

Проведём $LN$ параллельно $AD$ (см. рис.). Тогда $AL = AD = ND$. Следовательно, параллелограмм $ADNL$ является ромбом. Диагональ $AN$ ромба $ADNL$ является биссектрисой угла $BAD$.




**48.** Биссектрисы углов $C$ и $D$ параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке $L$, лежащей на стороне $AB$. Докажите, что $L$ - середина $AB$

**Решение.**

$\angle LCD = \angle CLB$ как накрест лежащие при параллельных $AB$ и $CD$ и секущей $CL$. $\angle LCD = \angle LCB$, так как $CL$ - биссектриса. Отсюда $\angle LCB = \angle CLB$. Таким образом, треугольник $CLB$ - равнобедренный, следовательно, $BL = BC$. Доказываем аналогичным образом, что $LA = AD$ и, следовательно, $BL = LA$, так как $BC = AD$ (из параллелограмма)