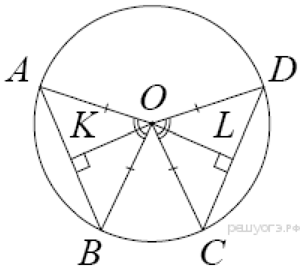
Окружности и их элементы

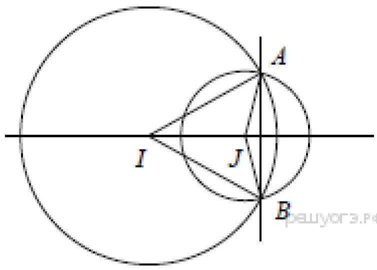
1. В окружности с центром O проведены две хорды AB и CD так, что центральные углы AOB и COD равны. На эти хорды опущены перпендикуляры OK и OL. Докажите, что OK и OL равны.

Решение.
Треугольники AOB и COD равны по двум сторонам и углу между ними ($AO = BO = CO = DO$ как радиусы окружности, $\angle AOB = \angle COD$ по условию). Следовательно, высоты OK и OL равны как соответственные элементы равных треугольников.

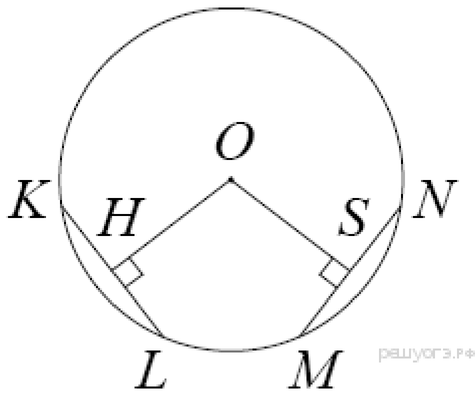


2. Окружности с центрами в точках I и J пересекаются в точках A и B, причём точки I и J лежат по одну сторону от прямой AB. Докажите, что отрезки AB и IJ перпендикулярны.

Решение.
Точка I равноудалена от A и B, поэтому она лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB. То же можно сказать и о J . Значит IJ — серединный перпендикуляр к AB.



3. В окружности с центром O проведены две равные хорды KL и MN. На эти хорды опущены перпендикуляры OH и OS. Докажите, что OH и OS равны.

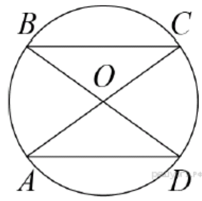


Решение.
Проведем OK, ON, OL, OM — радиусы. Треугольники KOL и MON равны по трем сторонам, тогда высоты OH и OS также равны как элементы равных треугольников. Что и требовалось доказать.

4. В окружности через середину O хорды AC проведена хорда BD так, что дуги AB и CD равны. Докажите, что O — середина хорды BD.

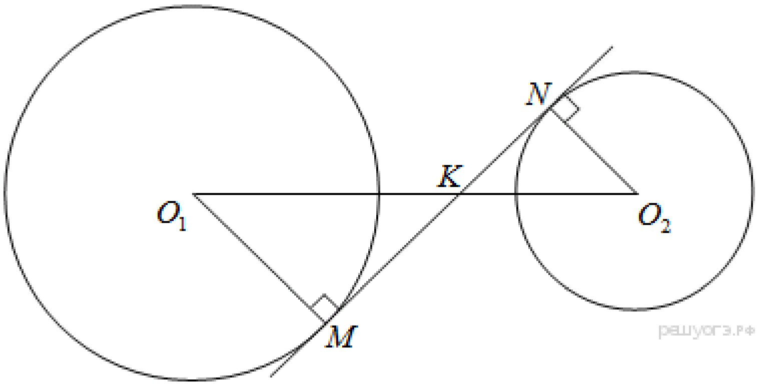
Решение.
Вписанные углы ADB, CBD , ACB и DAC опираются на равные дуги, значит, они равны.

Получаем, что треугольники COB и AOD подобны по двум углам; их коэффициент подобия равен $AO{:}OC$. Поскольку $AO = OC$, эти треугольники равны, следовательно, $BO = OD$.



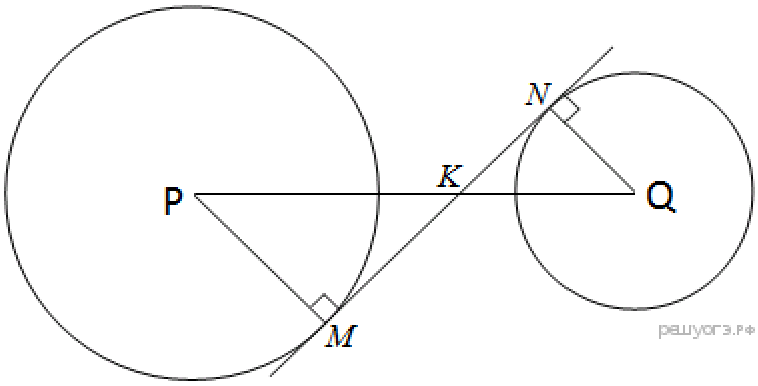
5. Окружности с центрами в точках O_1 и O_2 не имеют общих точек. Внутренняя общая касательная к этим окружностям делит отрезок, соединяющий их центры, в отношении $m{:}n$. Докажите, что диаметры этих окружностей относятся как $m{:}n$.

Решение.
Проведём построения и введём обозначения как показано на рисунке. Пусть $\frac{O_1K}{O_2K}=\frac{m}{n}$. Рассмотрим треугольники O_1KM и O_2KN, они прямоугольные, углы O_1KM и NKO_2 равны как вертикальные, следовательно, треугольники подобны, откуда $\frac{O_1M}{O_2N}=\frac{O_1K}{O_2K}=\frac{m}{n}$.



6. Окружности с центрами в точках P и Q не имеют общих точек, и ни одна из них не лежит внутри другой. Внутренняя общая касательная к этим окружностям делит отрезок, соединяющий их центры, в отношении a:b. Докажите, что диаметры этих окружностей относятся как a:b.

Решение.
Проведём построения и введём обозначения как показано на рисунке. Пусть $\frac{PK}{QK}=\frac{a}{b}$. Рассмотрим треугольники PKM и QKN, они прямоугольные, углы PKM и NKQ равны как вертикальные, следовательно, треугольники подобны, откуда $\frac{PM}{QN}=\frac{PK}{QK}=\frac{a}{b}$.



7. Окружности с центрами в точках P и Q пересекаются в точках K и L, причём точки P и Q лежат по одну сторону от прямой KL. Докажите, что прямые PQ и KL перпендикулярны.

Решение.
Проведём медиану QM. Стороны KQ и LQ равны как радиусы окружности, поэтому треугольник KLQ — равнобедренный, следовательно, медиана QM является также высотой. Проведём медиану PN. Стороны KP и LP равны как радиусы окружности, поэтому треугольник KLP — равнобедренный, следовательно, медиана PM является также высотой. прямые QM и PM перпендикулярны одной и той же прямой KL, следовательно они параллельны. Эти прямые проходят через одну и ту же точку N, значит, они совпадают. Таким образом прямая KL перпендикулярна прямой PQ.