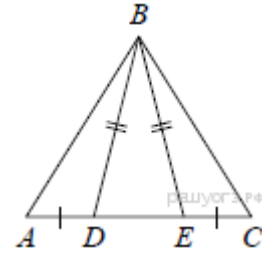


Треугольники и их элементы

1. На стороне AC треугольника ABC выбраны точки D и E так, что отрезки AD и CE равны (см. рисунок). Оказалось, что отрезки BD и BE тоже равны. Докажите, что треугольник ABC — равнобедренный.



Решение.

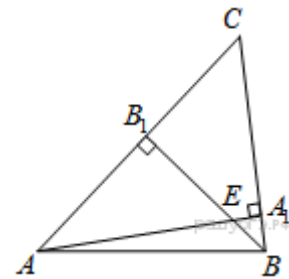
Так как по условию $BD = BE$, то треугольник BDE является равнобедренным. Пусть угол при основании этого треугольника равен x , тогда $\angle BEC = \angle BDA = 180^\circ - x$. Треугольники BEC и BDA равны по двум сторонам и углу между ними, поэтому $AB = BC$ и треугольник ABC — равнобедренный.

2. Высоты AA_1 и BB_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке E . Докажите, что углы AA_1B_1 и ABB_1 равны.

Решение.

Рассмотрим треугольники AEB_1 и BEA_1 , они прямоугольные, углы AEB_1 и BEA_1 равны как вертикальные, следовательно, треугольники подобны, откуда $\frac{EB_1}{EA_1} = \frac{AE}{EB}$. Рассмотрим треугольники EB_1A_1 и AEB , углы AEB и

B_1EA_1 равны как вертикальные, $\frac{EB_1}{AE} = \frac{EA_1}{EB}$, следовательно, эти треугольники подобны, откуда $\angle AA_1B_1 = \angle ABB_1$.



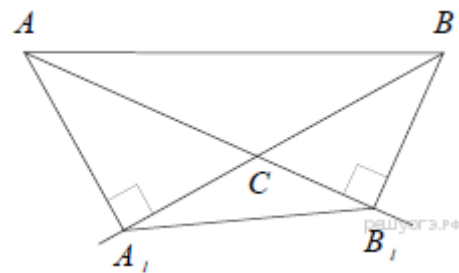
См. также.

Аналогичное задание с тупоугольным треугольником: 340854.

3. В треугольнике ABC с тупым углом ACB проведены высоты AA_1 и BB_1 . Докажите, что треугольники A_1CB_1 и ACB подобны.

Решение.

Поскольку угол ACB тупой, основания высот A_1 и B_1 будут лежать на продолжениях сторон BC и AC соответственно. Диагонали четырёхугольника AA_1B_1B пересекаются, поэтому он выпуклый. Поскольку $\angle AA_1B = \angle AB_1B = 90^\circ$, каждый из прямоугольных треугольников AA_1B и AB_1B вписан в окружность с диаметром AB . Это означает, что все вершины четырёхугольника AA_1B_1B лежат на одной окружности. Тогда углы $\angle AB_1A_1$ и $\angle ABA_1$ равны как вписанные углы, опирающиеся на дугу A_1A . Аналогично, $\angle BA_1B_1 = \angle BAB_1$. Значит, указанные треугольники подобны по двум углам.



Укажем общую теорему.

Основания двух высот треугольника (остроугольного или тупоугольного) и одна из его вершин образуют треугольник, подобный исходному; коэффициент подобия равен модулю косинуса их общего угла.

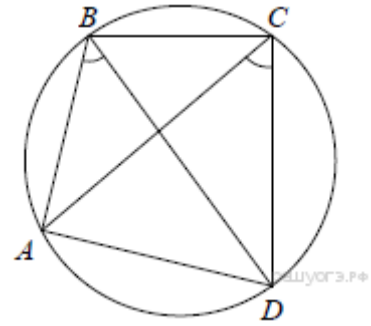
См. также.

Аналогичное задание с остроугольным треугольником: 340341.

4. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ углы ABD и ACD равны. Докажите, что углы DAC и DBC также равны.

Решение.

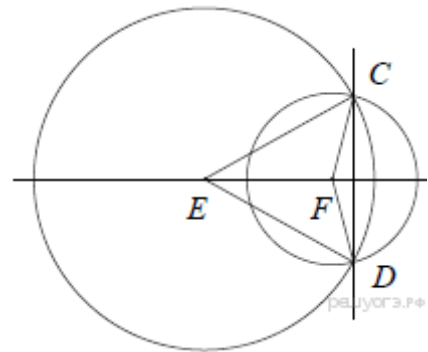
Поскольку $ABCD$ выпуклый и $\angle ABD = \angle ACD$, получаем, что около четырёхугольника $ABCD$ можно описать окружность. А тогда $\angle DAC = \angle DBC$ как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу CD .



5. Окружности с центрами в точках E и F пересекаются в точках C и D , причём точки E и F лежат по одну сторону от прямой CD . Докажите, что $CD \perp EF$.

Решение.

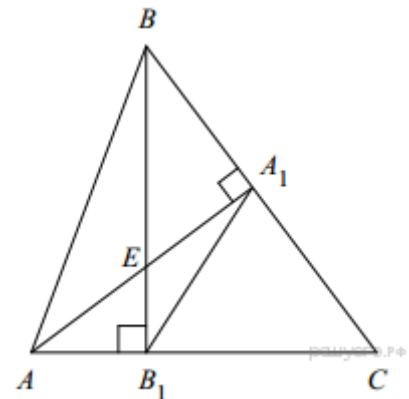
Точка E равноудалена от C и D , поэтому она лежит на серединном перпендикуляре к отрезку CD . То же можно сказать и о F . Значит EF — серединный перпендикуляр к CD , то есть $CD \perp EF$.



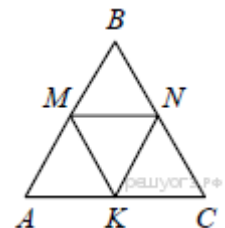
6. Высоты AA_1 и BB_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке E . Докажите, что углы AA_1B_1 и ABB_1 равны.

Решение.

Поскольку диагонали четырёхугольника AB_1A_1B пересекаются, он является выпуклым, а так как $\angle AB_1B = \angle AA_1B = 90^\circ$, около него можно описать окружность. Тогда углы AA_1B_1 и ABB_1 равны как вписанные, опирающиеся на одну дугу AB_1 .



7. В равностороннем треугольнике ABC точки M, N, K — середины сторон AB, BC, CA соответственно. Докажите, что треугольник MNK — равносторонний.

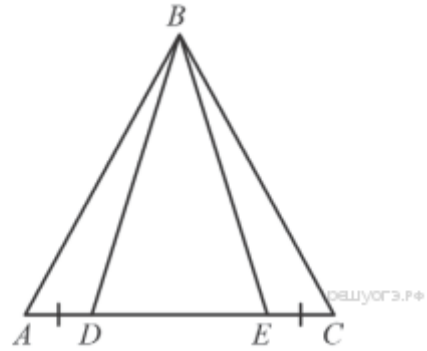
**Решение.**

Так как точки M, N, K — середины сторон и треугольник ABC — равносторонний, то отрезки AM, MB, BN, NC, KC, AK равны. В равностороннем треугольнике все углы равны, таким образом, треугольники AMK, NMB, CNK равны по двум сторонам и углу между ними. Тогда $MN=MK=KN$, значит треугольник MNK — равносторонний.

8. На стороне AC треугольника ABC отмечены точки D и E так, что $AD = CE$. Докажите, что если $BD = BE$, то $AB = BC$.

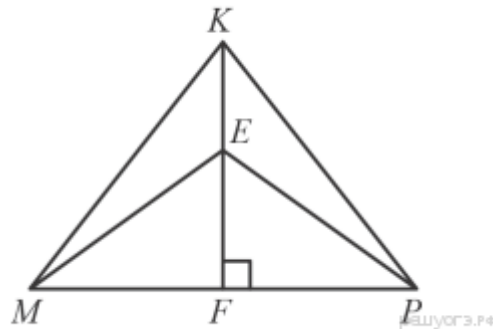
Решение.

Треугольник DBE — равнобедренный, поэтому $\angle BDE = \angle BED$. Значит, $\angle BDA = \angle BEC$ и треугольники BDA и BEC равны по первому признаку равенства треугольников. Значит, $AB = BC$.



9. На медиане KF треугольника MKP отмечена точка E . Докажите, что если $EM = EP$, то $KM = KP$.

Решение.



Поскольку треугольник MEP — равнобедренный, получаем, что его медиана EF также является высотой. Значит, в треугольнике MKP отрезок KF является высотой и медианой. Поэтому треугольник MKP — равнобедренный, то есть $KM = KP$.

10. Докажите, что биссектрисы углов при основании равнобедренного треугольника равны.

Решение.

Имеем: $\triangle ABC$; $AB = CB$ $\angle ACK = \angle KCB = \angle MAC = \angle BAM$

Докажем, что $AM = CK$.

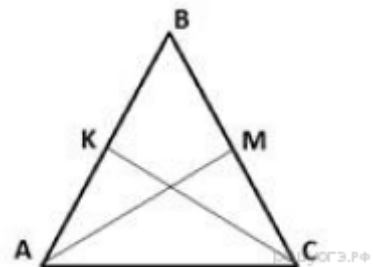
1) $\triangle ACK = \triangle CAM$ по стороне и двум прилежащим к ней углам:

а) AC — общая;

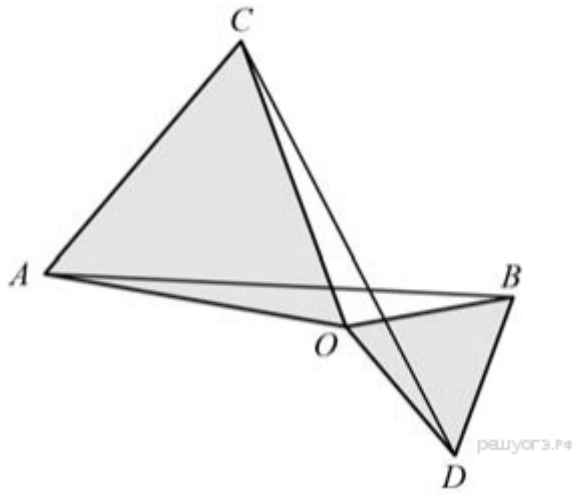
б) $\angle KAC = \angle MCA$ по свойству углов равнобедренного треугольника;

в) $\angle ACK = \angle MAC$ по определению биссектрисы и равенству углов при основании равнобедренного треугольника.

2) $KC = MA$ как соответствующие элементы равных треугольников.



11. Два равносторонних треугольника имеют общую вершину. Докажите, что отмеченные на рисунке отрезки AB и CD равны.



Решение.

Рассмотрим треугольники AOB и COD .

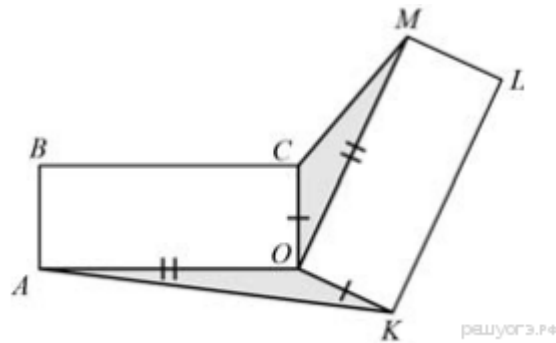
В них $AO = CO$, $BO = OD$ и

$$\angle AOB = \angle AOC + \angle COB = 60^\circ + \angle COB = \angle BOD + \angle COB = \angle COD.$$

Следовательно, эти треугольники равны по двум сторонам и углу между ними.

Поэтому $AB = CD$ как соответствующие стороны равных треугольников.

12. Два равных прямоугольника имеют общую вершину O (см. рис.). Докажите, что площади треугольников AOK и COM равны.



Решение.

Две стороны одного треугольника соответственно равны двум сторонам другого: $AO = OM$ и $OK = OC$. Рассмотрим углы между ними:

$$\angle AOK = 360^\circ - \angle AOC - \angle MOK - \angle MOC = 180^\circ - \angle MOC.$$

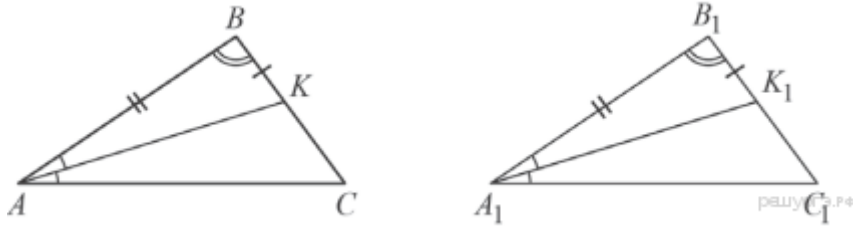
Поэтому

$$S_{AOK} = \frac{1}{2} AO \cdot OK \cdot \sin \angle AOK = \frac{1}{2} MO \cdot OC \cdot \sin \angle MOC = S_{MOC}.$$

13. Докажите, что у равных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ биссектрисы, проведённые из вершины A и A_1 , равны.

Решение.

Пусть AK и A_1K_1 — биссектрисы треугольников ABC и $A_1B_1C_1$. В треугольниках ABK и $A_1B_1K_1$ соответственно равны стороны AB и A_1B_1 , а также углы B и B_1 , BAK и $B_1A_1K_1$. Следовательно, треугольники равны по второму признаку равенства треугольников. Значит, $AK = A_1K_1$, что и требовалось доказать.



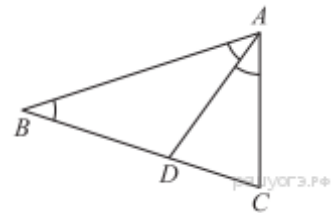
14. В треугольнике ABC угол B равен 36° , $AB = BC$, AD — биссектриса. Докажите, что треугольник ABD — равнобедренный.

Решение.

Треугольник ABC равнобедренный, поэтому $\angle ACB = \angle BAC = 72^\circ$.

Значит, $\angle BAD = \frac{\angle BAC}{2} = 36^\circ$. Таким образом, углы ABD и BAD

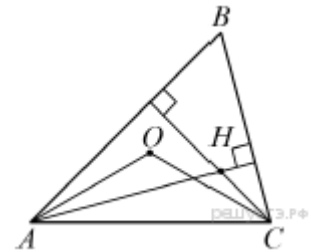
равны, поэтому треугольник ABD — равнобедренный.



15. В остроугольном треугольнике ABC угол B равен 60° . Докажите, что точки A , C , центр описанной окружности треугольника ABC и точка пересечения высот треугольника ABC лежат на одной окружности.

Решение.

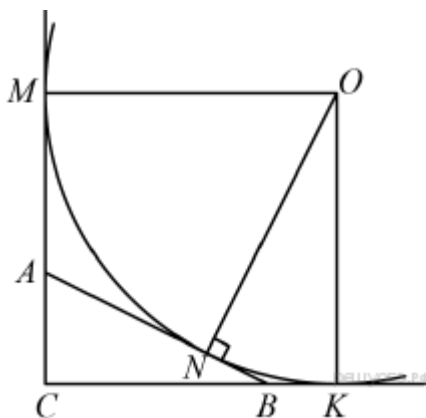
Обозначим центр описанной окружности треугольника ABC через O , а точку пересечения высот через H . Тогда $\angle AOC = 2\angle ABC = 120^\circ$ и $\angle AHC = 180^\circ - \angle ABC = 120^\circ$. Таким образом, точки A , C , O и H лежат на одной окружности.



16. Окружность касается стороны AB треугольника ABC , у которого $\angle C = 90^\circ$, и продолжений его сторон AC и BC за точки A и B соответственно. Докажите, что периметр треугольника ABC равен диаметру этой окружности.

Решение.

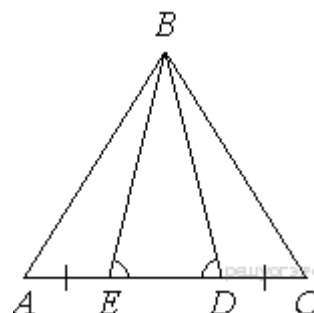
Пусть O — центр окружности, d — её диаметр, а M , N и K — точки касания окружности с прямыми AC , AB и BC соответственно. Радиус OM перпендикулярен AC , а OK перпендикулярен BC . Следовательно, в четырёхугольнике $OMCK$ имеем $\angle C = \angle M = \angle K = 90^\circ$, а значит, $OMCK$ — прямоугольник. Поскольку $OM = OK$, прямоугольник $OMCK$ — квадрат. Следовательно, $MC = MO = \frac{d}{2}$.



Отрезки касательных, проведённых из одной точки к окружности, равны: $AM = AN$, $BN = BK$ и $CM = CK$. Периметр треугольника ABC равен

$$\begin{aligned} P &= AB + BC + AC = AC + AN + BN + BC = \\ &= AC + AM + BK + BC = MC + CK = 2MC = d. \end{aligned}$$

17. На стороне AC треугольника ABC выбраны точки D и E так, что углы ADB и BEC равны (см. рисунок). Оказалось, что отрезки AE и CD тоже равны. Докажите, что треугольник ABC — равнобедренный.

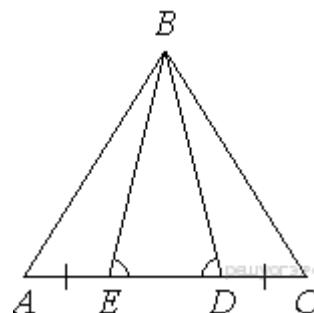
**Решение.**

Углы BED и BDE равны, поэтому треугольник BED — равнобедренный, то есть $BE = BD$

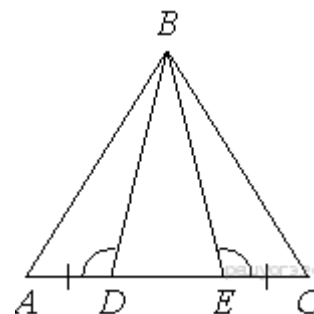
Углы AED и EDC — развёрнутые, поэтому:

$$\angle AEB = 180^\circ - \angle BED = 180^\circ - \angle BDE = \angle BDC.$$

Рассмотрим треугольники ABE и BDC , $AE = DC$, $BE = BD$, $\angle AEB = \angle BDC$, следовательно, эти треугольники равны, а значит, $AB = BC$, то есть треугольник ABC — равнобедренный.



18. На стороне AC треугольника ABC выбраны точки D и E так, что отрезки AD и CE равны (см. рисунок). Оказалось, что углы ADB и BEC тоже равны. Докажите, что треугольник ABC — равнобедренный.



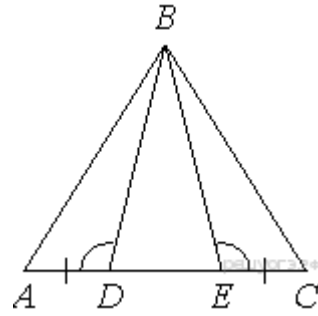
Решение.

Углы ADE и DEC — развёрнутые, поэтому:

$$\angle BDE = 180^\circ - \angle ADB = 180^\circ - \angle BEC = \angle BED.$$

Углы BDE и BED равны, следовательно, треугольник DBE — равнобедренный, значит $BD = BE$.

Рассмотрим треугольники ABD и BEC , $AD = EC$, $BD = BE$, $\angle ADB = \angle BEC$, следовательно, эти треугольники равны, а значит, $AB = BC$, то есть треугольник ABC — равнобедренный.

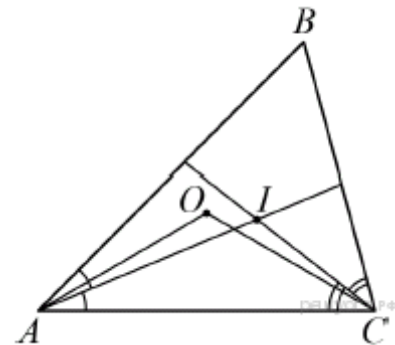


19. В остроугольном треугольнике ABC точки A , C , центр описанной окружности O и центр вписанной окружности I лежат на одной окружности. Докажите, что угол ABC равен 60° .

Решение.

В треугольнике ABC имеем $\angle AOC = 2\angle ABC$, а $\angle AIC = 90^\circ + \frac{\angle ABC}{2}$.

Таким образом, $2\angle ABC = 90^\circ + \frac{\angle ABC}{2}$, значит, $\angle ABC = 60^\circ$.



20. В остроугольном треугольнике ABC угол B равен 60° . Докажите, что точки A , C , центр описанной окружности треугольника ABC и центр вписанной окружности треугольника ABC лежат на одной окружности.

Решение.

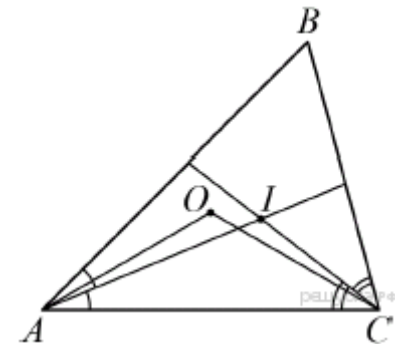
Обозначим центр описанной окружности треугольника ABC через O , а центр вписанной окружности через I .

Тогда

$$\angle AOC = 2\angle ABC = 120^\circ$$

$$\angle AIC = 90^\circ + \frac{\angle ABC}{2} = 120^\circ$$

Таким образом, точки A , C , O и I лежат на одной окружности.



21. Известно, что около четырёхугольника $ABCD$ можно описать окружность и что продолжения сторон AD и BC четырёхугольника пересекаются в точке K . Докажите, что треугольники KAB и KCD подобны.

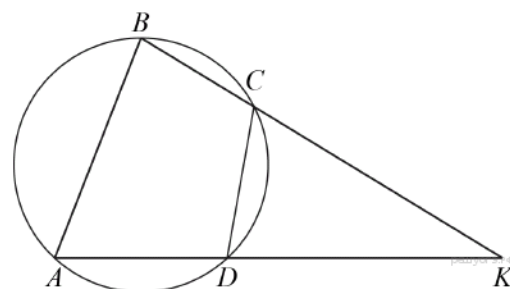
Решение.

Поскольку четырёхугольник $ABCD$ вписанный, сумма углов ABC и ADC равна 180° .

Следовательно,

$$\angle KDC = 180^\circ - \angle ADC = \angle ABC.$$

Получаем, что в треугольниках KAB и KCD углы ABK и CDK равны, угол K общий, следовательно, эти треугольники подобны.



22. Докажите, что медиана треугольника делит его на два треугольника, площади которых равны между собой.

Решение.

Введём обозначения как показано на рисунке.

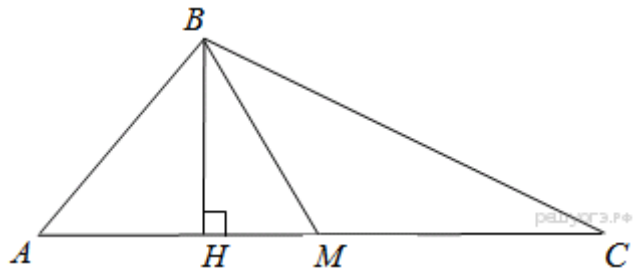
Проведём медиану BM и высоту BH . Площадь

треугольника ABM $S_{ABM} = \frac{1}{2}AM \cdot BH$, пло-

щадь треугольника BMC $S_{BMC} = \frac{1}{2}MC \cdot BH$.

Отрезки AM и MC равны, следовательно,

$S_{ABM} = S_{BMC}$.



23. В треугольнике ABC с тупым углом ACB проведены высоты AA_1 и BB_1 . Докажите, что треугольники A_1CB_1 и ACB подобны.

Решение.

Углы A_1AC и CBB_1 равны как углы с взаимно перпендикулярными сторонами. Рассмотрим треугольники A_1AC и CBB_1 , они прямоугольные, углы A_1AC и CBB_1 равны, следовательно, эти тре-

угольники подобны, откуда $\frac{BC}{AC} = \frac{B_1C}{A_1C} = \frac{BB_1}{AA_1}$. Рассмотрим треугольники A_1CB_1 и ACB углы

A_1CB_1 и ACB равны как вертикальные, $\frac{BC}{AC} = \frac{B_1C}{A_1C}$, следовательно, эти треугольники подобны.

24. Известно, что около четырёхугольника $ABCD$ можно описать окружность и что продолжения сторон AD и BC четырёхугольника пересекаются в точке K . Докажите, что треугольники KAB и KCD подобны.

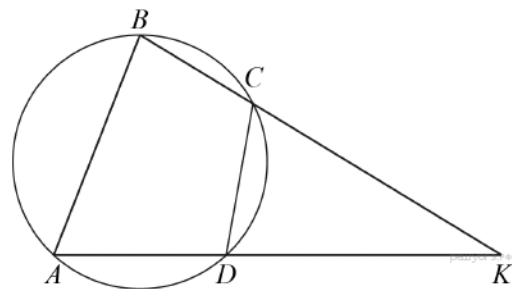
Решение.

Поскольку четырёхугольник $ABCD$ вписанный, сумма углов ABC и ADC равна 180° .

Следовательно,

$$\angle KDC = 180^\circ - \angle ADC = \angle ABC.$$

Получаем, что в треугольниках KAB и KCD углы ABK и CDK равны, угол K общий, следовательно, эти треугольники подобны.

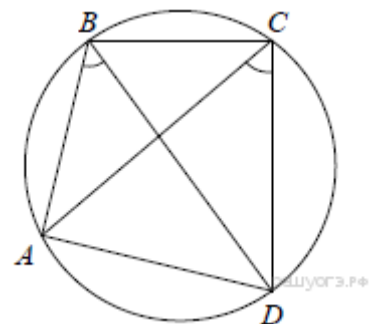


Дублирует задание 333348

25. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ углы ABD и ACD равны. Докажите, что углы DAC и DBC также равны.

Решение.

Поскольку $ABCD$ выпуклый и $\angle ABD = \angle ACD$, получаем, что около четырёхугольника $ABCD$ можно описать окружность. А тогда $\angle DAC = \angle DBC$ как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу CD .



Дублирует задание 340880

26. В треугольнике ABC с тупым углом BAC проведены высоты BB_1 и CC_1 . Докажите, что треугольники AB_1C_1 и ABC подобны.

Решение.

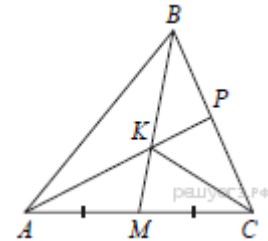
Углы B_1BA и ACC_1 равны как углы с взаимно перпендикулярными сторонами. Рассмотрим треугольники B_1AB и ACC_1 , они прямоугольные, углы B_1BA и ACC_1 равны, следовательно, эти треугольники подобны, откуда $\frac{AC}{AB} = \frac{C_1A}{B_1A} = \frac{CC_1}{BB_1}$. Рассмотрим треугольники AB_1C_1 и ABC углы B_1AC_1 и BAC равны как вертикальные, $\frac{AC}{AB} = \frac{C_1A}{B_1A}$, следовательно, эти треугольники подобны.

27. В треугольнике ABC на его медиане BM отмечена точка K так, что $BK : KM = 3 : 7$. Найдите отношение площади треугольника ABK к площади треугольника ABC

Решение.

По свойству медианы, медиана BM делит треугольник ABC на два равновеликих, т.е. $S_{ABM} = S_{MBC} = \frac{1}{2}S_{ABC}$. Из условия известно, что

$$\frac{3}{7} = \frac{BK}{MK} = \frac{S_{ABK}}{S_{AMK}}. \text{ Следовательно, } S_{ABK} = \frac{3}{7}S_{AMK}$$



$$S_{ABM} = S_{ABK} + S_{AKM} = \frac{3}{7}S_{AMK} + S_{AMK} = \frac{10}{7}S_{AMK}$$

$$S_{ABC} = 2S_{ABM} = 2 \cdot \frac{10}{7}S_{AMK} = \frac{20}{7}S_{AMK}$$

$$\frac{S_{ABK}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{3}{7}S_{AMK}}{\frac{20}{7}S_{AMK}} = 0,15$$

Ответ: 0,15

28. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BB_1 и CC_1 . Докажите, что углы BB_1C_1 и BCC_1 равны.

Решение.

Треугольники CBB_1 и CC_1B имеют общую гипотенузу BC . Поэтому точки C, B, C_1, B_1 лежат на одной окружности. Углы BB_1C_1 и BCC_1 опираются на одну дугу, и поэтому равны.