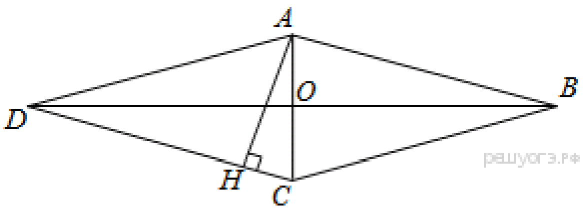
# Четырёхугольники

**1.** Высота $AH$ ромба $ABCD$ делит сторону $CD$ на отрезки $DH = 21$ и $CH = 8$. Найдите высоту ромба.

**Решение.**




Введём обозначения как показано на рисунке. Угол $ODC$ и $CAH$ равны как углы с взаимно перпендикулярными сторонами. Рассмотрим треугольники $COD$ и $ACH$, они прямоугольные, углы $ODC$ и $CAH$ равны, следовательно, эти треугольники подобны, откуда $\frac{OD}{AH} = \frac{OC}{CH} = \frac{CD}{AC}$. Диагонали ромба делятся точкой пересечения пополам: $OC = \frac{1}{2}AC$. Получаем:

$$\frac{\frac{1}{2}AC}{CH} = \frac{CD}{AC} \Leftrightarrow AC = \sqrt{2CH \cdot CD} \Leftrightarrow AC = 4\sqrt{29}.$$

Из прямоугольного треугольника $ACH$, используя теорему Пифагора найдём $AH$ :

$$AH = \sqrt{AC^2 - CH^2} = \sqrt{464 - 64} = \sqrt{400} = 20.$$

Ответ: 20.

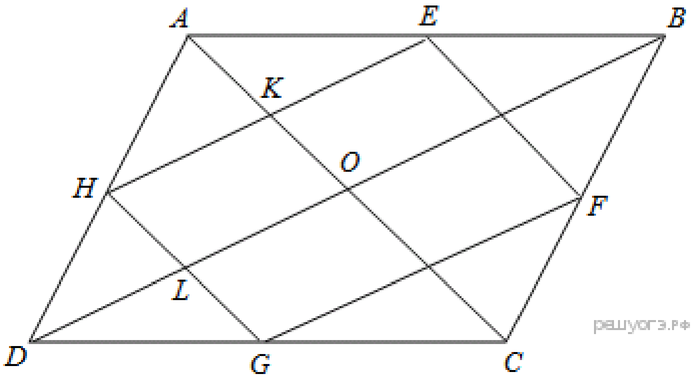
-----------

Приведем другое решение:

$DC = 21 + 8 = 29$
$AD = DC = 29$
$AH = \sqrt{AD^2 - DH^2} = \sqrt{29^2 - 21^2} = \sqrt{8 \cdot 50} = 20$

**2.** Вершины ромба расположены на сторонах параллелограмма, а стороны ромба параллельны диагоналям параллелограмма. Найдите отношение площадей ромба и параллелограмма, если отношение диагоналей параллелограмма равно 28.

**Решение.**




Введём обозначения как показано на рисунке. Поскольку $HG \parallel AC$ и $HE \parallel BD$, получаем, что $HKOL$ — параллелолограмм, следовательно, углы $KHL$ и $KOL$ равны. Рассмотрим треугольники $ABC$ и $EBF$, угол $EBF$ — общий, углы $BEF$ и $BAC$ равны как соответственные при параллельных прямых, углы $BFE$ и $BCA$ — аналогично, следовательно, треугольники $ABC$ и $BEF$ подобны по двум углам. Откуда $\dfrac{EF}{AC}=\dfrac{BE}{AB}$ Аналогично подобны треугольники $ABD$ и $AEH$, откуда $\dfrac{HE}{BD}=\dfrac{AE}{AB}$. Пусть сторона ромба равна $a$, а длина короткой диагонали равна $d$. Сложим два полученных уравнения:

$$\frac{EF}{AC}+\frac{HE}{BD}=\frac{AE}{AB}+\frac{BE}{AB}\Leftrightarrow\frac{a}{d}+\frac{a}{28d}=\frac{AE+EB}{AB}\Leftrightarrow.$$

$$\Leftrightarrow\frac{28a+a}{28d}=\frac{AB}{AB}\Leftrightarrow 28d=29a\Leftrightarrow a=\frac{28d}{29}.$$

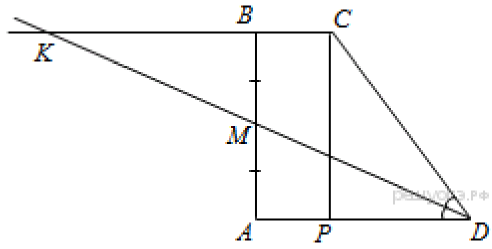
Площадь ромба можно найти как произведение сторон на синус угла между ними: $S_{HEFG}=a^2\sin\angle KHL$. Площадь параллелограмма можно найти как половину произведения диагоналей на синус угла между ними: $S_{ABCD}=\dfrac{1}{2}\cdot AC\cdot BD\cdot\sin\angle KOL=d\cdot 28d\cdot\sin\angle KOL$. Найдём отношение площадей ромба и параллелограмма:

$$\frac{S_{HEFG}}{S_{ABCD}}=\frac{a^2\sin\angle KHL}{\frac{1}{2}\cdot d\cdot 28d\cdot\sin\angle KOL}=\frac{a^2}{14d^2}=\frac{d^2\frac{28^2}{29^2}}{14d^2}=\frac{56}{841}.$$

Ответ: $\dfrac{56}{841}$.

**3.** Боковые стороны $AB$ и $CD$ трапеции $ABCD$ равны соответственно 20 и 25, а основание $BC$ равно 5. Биссектриса угла $ADC$ проходит через середину стороны $AB$. Найдите площадь трапеции.

**Решение.**




Введём обозначения как показано на рисунке. Продолжим биссектрису до пересечения с прямой $BC$ в точке $K$. Углы $CKD$ и $ADK$ равны как накрест лежащие при параллельных прямых. Значит, $\angle ADK = \angle CDK = \angle CKD$, следовательно, треугольник $CKD$ — равнобедренный: $KC = CD = 25$. Найдём $BK$: $BK = CK - BC = 25 - 5 = 20$. Углы $KMB$ и $AMD$ равны как вертикальные. Рассмотрим треугольники $KMB$ и $AMD$: стороны $AM$ и $BM$ равны, углы $KMB$ и $AMD$ равны как вертикальные, углы $KBM$ и $MAD$ равны как накрест лежащие при параллельных прямых, следовательно, эти треугольники равны, откуда $AD = KB = 20$. Проведём прямую $CP$, параллельную $AB$. Прямая $AB$ параллельна $CP$, прямая $AD$ параллельна $BC$, следовательно, четырёхугольник $ABCP$ — параллелограмм, откуда $AP = BC = 5$, $CP = AB = 20$. Найдём $PD$: $PD = AD - AP = 20 - 5 = 15$. Рассмотрим треугольник $CPD$, заметим, что

$$CP^2 + PD^2 = 400 + 225 = 625 = CD^2.$$

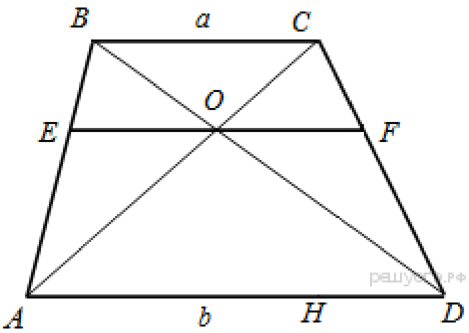
Следовательно, по теореме, обратной теореме Пифагора, получаем, что треугольник $CPD$ — прямоугольный, следовательно, $CP$ — высота трапеции. Найдём площадь трапеции:

$$S = \frac{BC + AD}{2} \cdot CP = \frac{5 + 20}{2} \cdot 20 = 250.$$

Ответ: 250.

**4.** Основания трапеции относятся как 1:3. Через точку пересечения диагоналей проведена прямая, параллельная основаниям. В каком отношении эта прямая делит площадь трапеции?

**Решение.**




Введём обозначения как показано на рисунке. Отрезок, проходящий через точку пересечения диагоналей трапеции, равен среднему гармоническому её оснований. Пусть $BC = a$, тогда $AD = 3a$ и $EF = \dfrac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{3a}} = \dfrac{3a}{2}$. Поскольку треугольники $BOC$ и $AOD$ подобны, их высоты $h_{AOD}$ и $h_{BOC}$, проведенные соответственно к сторонам $AD$ и $BC$, относятся как 3:1. Тем самым, для отношения искомого отношения площадей трапеций $EBCF$ и $AEFD$ имеем:

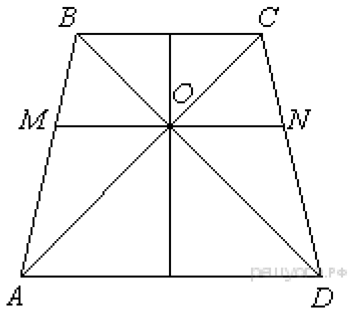
$$\frac{S_{EBCF}}{S_{AEFD}} = \frac{\frac{BC+EF}{2} \cdot h_{BOC}}{\frac{EF+AD}{2} \cdot h_{AOD}} = \frac{a + \frac{3a}{2}}{\frac{3a}{2} + 3a} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2a + 3a}{3a + 6a} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{27}.$$

Ответ: 5:27.

**5.** Основания трапеции относятся как 2:3. Через точку пересечения диагоналей проведена прямая, параллельная основаниям. В каком отношении эта прямая делит площадь трапеции?

**Решение.**

Пусть диагонали $AC$ и $BD$ трапеции $ABCD$ с основаниями $BC = 2a$, $AD = 3a$ пересекаются в точке $O$, а прямая, параллельная основаниям и проходящая через точку $O$, пересекает боковые стороны $AB$ и $CD$ в точках $M$ и $N$ соответственно (см. рис.).




Треугольник $BOC$ подобен треугольнику $DOA$ с коэффициентом $\frac{2}{3}$, поэтому треугольник $AMO$ подобен треугольнику $ABC$ с коэффициентом $\frac{3}{5}$. Значит, $OM = \frac{3}{5}BC = \frac{6}{5}a$. Аналогично, $ON = \frac{6}{5}a$. Следовательно, $MN = \frac{12}{5}a$. Пусть $h_1$ и $h_2$ — высоты подобных треугольников $BOC$ и $DOA$, проведённые из общей вершины $O$. Тогда $\frac{h_1}{h_2} = \frac{2}{3}$. Следовательно,

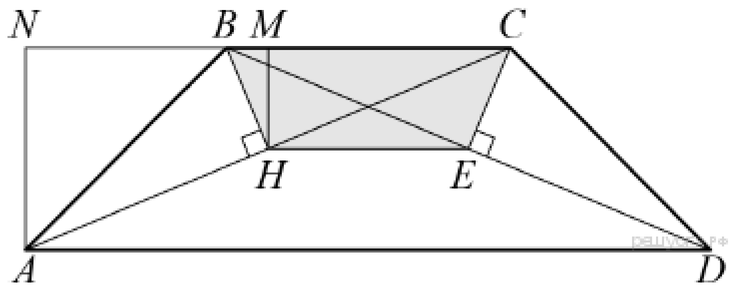
$$\frac{S_{BMNC}}{S_{AMND}} = \frac{\frac{1}{2}(MN+BC)h_1}{\frac{1}{2}(MN+AD)h_2} = \frac{\frac{12}{5}a+2a}{\frac{12}{5}a+3a} \cdot \frac{2}{3} = \frac{44}{81}.$$

Ответ: 44:81.

**6.** В равнобедренной трапеции $ABCD$ боковые стороны равны меньшему основанию $BC$. К диагоналям трапеции провели перпендикуляры $BH$ и $CE$. Найдите площадь четырёхугольника $BCEH$, если площадь трапеции $ABCD$ равна 36 .

**Решение.**

По свойству равнобедренной трапеции $AC = BD$, следовательно, треугольники $ABC$ и $DCB$ равны. Так как $AB = BC = CD$, треугольники $ABC$ и $DCB$ равнобедренные, следовательно, $BH$ и $CE$ — соответствующие медианы этих треугольников. Значит, $AH = HC = BE = ED$. Отрезок $HE$ соединяет середины диагоналей трапеции, следовательно, $HE = \frac{AD - BC}{2}$, и прямые $HE$, $AD$ и $BC$ параллельны, поэтому, $BCEH$ — трапеция. Проведём $HM$ — высоту трапеции $BCEH$ и $AN$ — высоту трапеции $ABCD$. Прямоугольные треугольники $ANC$ и $HMC$ подобны, значит, $HM = AN \cdot \frac{HC}{AC} = AN \cdot \frac{HC}{2HC} = \frac{AN}{2}$.




Площадь трапеции $ABCD$: $S_1 = \frac{1}{2} AN \cdot (AD + BC)$.

Площадь трапеции $BCEH$:

$$S = \frac{1}{2} HM \cdot (BC + HE) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} AN \cdot \left( BC + \frac{AD - BC}{2} \right) = \frac{1}{8} AN \cdot (AD + BC) = \frac{1}{4} S_1 = 9.$$

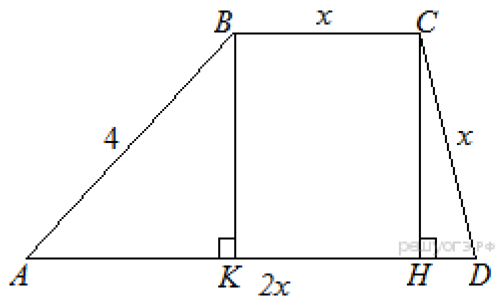
Ответ: 9.

**7.** В трапеции $ABCD$ основание $AD$ вдвое больше основания $BC$ и вдвое больше боковой стороны $CD$. Угол $ADC$ равен $60°$, сторона $AB$ равна 4. Найдите площадь трапеции.

**Решение.**

Пусть длина стороны $BC$ равна $x$, тогда длина стороны $CD$ — $x$, а стороны $AD$ — $2x$. Проведём высоты $BK$ и $CH$ в трапеции. Рассмотрим прямоугольный треугольник $CHD$ и найдём из него отрезок $HD$:

$$HD = CD \cdot \cos \angle ADC = \frac{x}{2}.$$




Рассмотрим четырёхугольник $KBCH$, $BK$ равно $CH$ и прямая $BK$ параллельна $CH$, поскольку обе эти прямые перпендикулярны прямой $AD$, следовательно $KBCH$ — параллелограмм, значит, $BK = CH$ и $BC = KH = x$. Найдём отрезок $AK$:

$$AK = AD - KH - HD = 2x - x - \frac{x}{2} = \frac{x}{2}.$$

Рассмотрим треугольники $ABK$ и $CHD$ — они прямоугольные, $AK = HD = \frac{x}{2}$, $BK = CH$, следовательно эти треугольники равны, значит, $AB = CD = BC = 4$, $AD = 8$.

Найдём высоту $CH$ из треугольника $CHD$:

$$CH = CD \cdot \sin \angle ADC = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}.$$

Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту:

$$S = \frac{AD + BC}{2} \cdot CH = \frac{8 + 4}{2} \cdot 2\sqrt{3} = 12\sqrt{3}.$$

Ответ: $12\sqrt{3}$.

**8.** В трапеции проведен отрезок, параллельный основаниям и делящий ее на две трапеции одинаковой площади. Найдите длину этого отрезка, если основания трапеции равны $24\sqrt{2}$ см и $7\sqrt{2}$ см.

**Решение.**

Пусть $AD = b$, $BC = a$. Проведем отрезок $KL$, делящий трапецию на две равновеликие трапеции и обозначим его длину $x$. Проведем из $C$ высоту $CH$ и отрезок $CE$, параллельный стороне $AB$. Точки пересечения этих отрезков с отрезком $KL$ назовем $M$ и $N$ соответственно.

Из условия следует, что

$$2(a+x)\cdot CM = (a+b)\cdot CH.$$

Из подобия треугольников $NCL$ и $ECD$ следует:

$$\frac{CM}{CH} = \frac{NL}{ED} = \frac{x-a}{b-a} \text{ откуда } CM = \frac{x-a}{b-a}\cdot CH.$$

Следовательно,

$$2(a+x)\cdot\frac{x-a}{b-a}\cdot CH = (a+b)\cdot CH.$$

Разделим обе части равенства на $CH$:

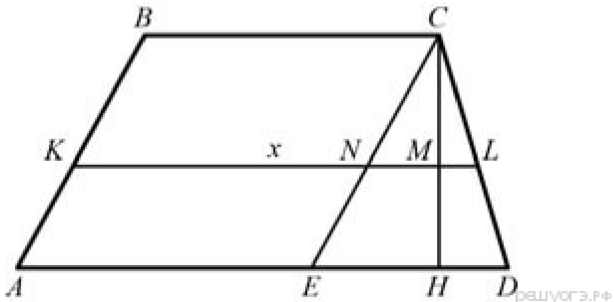
$$\frac{2(x^2-a^2)}{b-a} = a+b,$$

откуда

$$x^2 - a^2 = \frac{b^2-a^2}{2};\ x^2 = \frac{a^2+b^2}{2};\ x = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Подставляя $a = 7\sqrt{2}$ и $b = 24\sqrt{2}$, получаем:

$$x = \sqrt{\frac{2\cdot 49 + 2\cdot 576}{2}} = \sqrt{625} = 25.$$

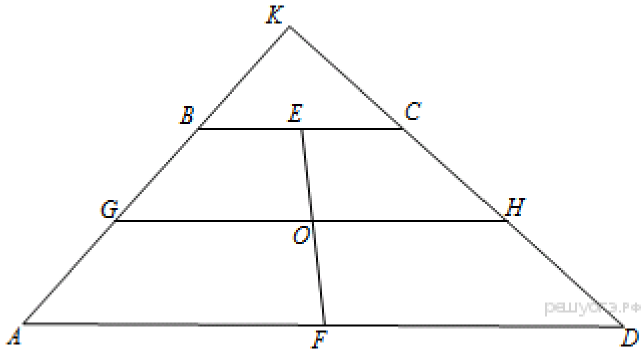



Ответ: 25.

**9.** Углы при одном из оснований трапеции равны 77° и 13°, а отрезки, соединяющие середины противоположных сторон трапеции, равны 11 и 10. Найдите основания трапеции.

**Решение.**

Продлим стороны $AB$ и $CD$ до пересечения в точке $K$. В треугольнике $AKD$ сумма углов $KAD$ и $KDA$ равна $90°$, следовательно, величина $\angle AKD = 180° - \angle KAD - \angle KDA = 90°$. Значит, треугольник $AKD$ — прямоугольный. Рассмотрим треугольник $AKD$, он прямоугольный, следовательно, центр описанной окружности — середина гипотенузы, то есть точка $F$. Значит, $AF = KF = FD = R = \frac{AD}{2}$.




Рассмотрим треугольники $AKF$ и $GKO$, угол $AKF$ — общий, углы $KGO$ и $KAF$ равны как соответственные углы при параллельных прямых, следовательно, эти треугольники подобны по двум углам, коэффициент подобия равен $\frac{OK}{KF} = k$. Аналогично, подобны треугольники $FKD$ и $OKH$, их коэффициент подобия равен $\frac{OK}{KF} = k$. Покажем, что отрезки $GO$ и $OH$ равны: $GO = kAF$, $OH = kFD = kAF = GO$. Рассмотрим треугольник $GKH$, он прямоугольный, аналогично треугольнику $AKF$ точка $O$ — центр описанной окружности треугольника $GKH$, откуда $GO = KO = OH = \frac{GH}{2}$. Аналогично, в треугольнике $BKC$ — $BE = KE = EC = \frac{BC}{2}$.

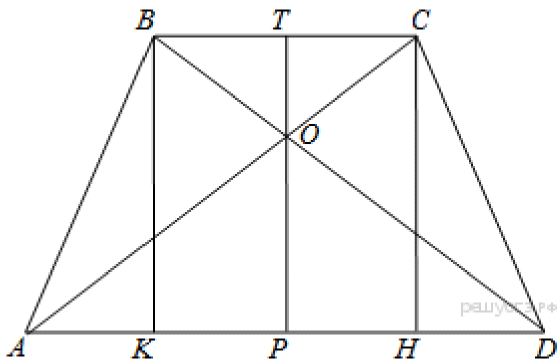
Получаем: $OH = KO = KE + EO = EC + \frac{EF}{2}$, откуда $EC = OH - \frac{EF}{2} = \frac{GH - EF}{2}$. Значит, $BC = 2EC = GH - EF = 1$.

Отрезок $GH$ — средняя линия трапеции, следовательно, $GH = \frac{AD + BC}{2}$, откуда $AD = 2GH - BC = 2 \cdot 11 - 1 = GH + EF = 21$.

Ответ: 1; 21.

**10.** В равнобедренную трапецию, периметр которой равен 120, а площадь равна 540, можно вписать окружность. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей трапеции до её меньшего основания.

**Решение.**
Проведём построения и введём обозначения как показано на рисунке. В четырёхугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда суммы длин противоположных сторон равны:




$$AB + CD = BC + AD \Leftrightarrow 2AB = BC + AD.$$

Периметр трапеции — сумма длин всех сторон:

$$P = AB + BC + CD + AD \Leftrightarrow P = 2AB + BC + AD \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P = 4AB \Leftrightarrow AB = \frac{P}{4} \Leftrightarrow AB = 30.$$

Следовательно, $BC + AD = 2AB = 60$. Площадь трапеции можно найти как произведение полусуммы оснований на высоту:

$$S = \frac{BC + AD}{2} \cdot TP \Leftrightarrow TP = \frac{2S}{BC + AD} \Leftrightarrow TP = 18.$$

Высоты $BK$, $TP$ и $CH$ равны. Из прямоугольного треугольника $CHD$ найдём $HD$:

$$HD = \sqrt{CD^2 - CH^2} = \sqrt{900 - 324} = 24.$$

Рассмотрим треугольники $ABK$ и $CHD$, они прямоугольные, $AB$ равно $CD$, $BK$ равно $CH$, следовательно, треугольники равны, откуда $AK = HD = 24$. Прямые $BK$ и $CH$ перпендикулярны прямой $AD$, поэтому они параллельны, $BK$ равно $CH$, следовательно, четырёхугольник $BCHK$ — параллелограмм, по признаку параллелограмма, откуда $BC = KH$. Рассмотрим выражение для отрезка $AD$:

$$AD = AK + KH + HD \Leftrightarrow AD = 2HD + BC \Leftrightarrow AD - BC = 2HD.$$

Получаем систему уравнений на отрезки $AD$ и BC:

$$\begin{cases} AD + BC = 60, \\ AD - BC = 48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AD = 54, \\ BC = 6. \end{cases}$$

Рассмотрим треугольники $AOD$ и $BOC$, углы CAD и BAC равны как накрест лежащие при параллельных прямых, углы $BOC$ и $AOD$ равны как вертикальные, следовательно, треугольники подобны. Откуда:

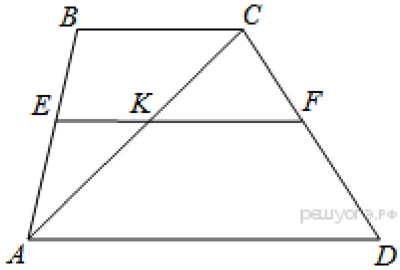
$$\frac{BC}{AD} = \frac{OT}{OP} \Leftrightarrow OP = 9OT.$$

Высота $TP = OT + OP = OT + 9OT = 10OT = 18$. Значит, искомое расстояние $OT = 1{,}8$.

Ответ: 1,8.

**11.** Прямая, параллельная основаниям трапеции $ABCD$, пересекает её боковые стороны $AB$ и $CD$ в точках $E$ и $F$ соответственно. Найдите длину отрезка $EF$, если $AD = 42$, BC = 14, $CF{:}DF = 4{:}3$.

**Решение.**

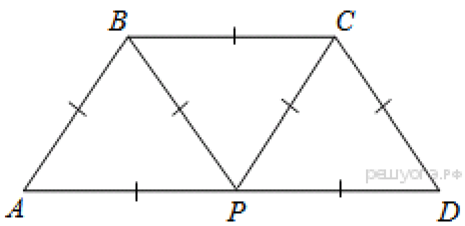



Проведём построения и введём обозначения как показано на рисунке. Рассмотрим треугольники $KFC$ и $ACD$, угол C — общий, углы $CAD$ и $CKF$ равны друг другу как соответственные углы при параллельных прямых, следовательно, треугольники $KFC$ и $ACD$ подобны. Откуда $\frac{KF}{AD}=\frac{CF}{CD}=\frac{CF}{CF+DF}=\frac{4}{7}$, поэтому $KF=\frac{4}{7}\cdot 42=24$. Аналогично, из треугольников $EKA$ и $ABC$ получаем, что $EK=BC\frac{3}{7}=\frac{3}{7}\cdot 14=6$. Таким образом, $EF=EK+KF=6+24=30$.

Ответ: 30.

**12.** В трапеции $ABCD$ основание $AD$ вдвое больше основания $BC$ и вдвое больше боковой стороны $CD$. Угол $ADC$ равен 60°, сторона $AB$ равна 1. Найдите площадь трапеции.

**Решение.**



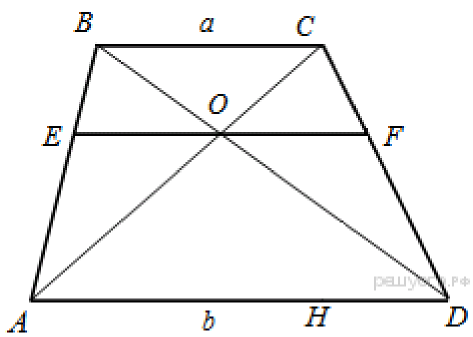

Пусть точка $P$ — середина стороны $AD$. Поскольку $PD=CD$, то треугольник $PCD$ — равнобдеренный. Угол при вершине этого треугольника равен 60°, следовательно углы при основании равны $\frac{180^\circ-60^{c}irc}{2}=60^\circ$, значит, треугольник $PCD$ — равносторонний. Угол $BCP$ равен $120^\circ-60^\circ=60^\circ$. Аналогично получаем, что треугольник $BCP$ — равносторонний. Найдём угол $APB$: $\angle APB=180^\circ-60^\circ-60^\circ=60^\circ$. Аналогично двум предыдущим треугольникам получаем, что треугольник $ABP$ — равносторонний. Получили, что площадь трапеции равна сумме площадей трёх равных равносторонних треугольников:

$$S_{ABCD}=3\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=3\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Ответ: $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

**13.** Основания трапеции относятся как 1:2. Через точку пересечения диагоналей проведена прямая, параллельная основаниям. В каком отношении эта прямая делит площадь трапеции?

**Решение.**




Введём обозначения как показано на рисунке. Отрезок, проходящий через точку пересечения диагоналей трапеции, равен среднему гармоническому её оснований. Пусть $BC=a$, тогда $AD=2a$ и $EF=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{2a}}=\frac{4a}{3}$. Поскольку треугольники $BOC$ и $AOD$ подобны, их высоты $h_{AOD}$ и $h_{BOC}$, проведенные соответственно к сторонам $AD$ и $BC$, относятся как 2:1. Тем самым, для отношения искомого отношения площадей трапеций $EBCF$ и $AEFD$ имеем:

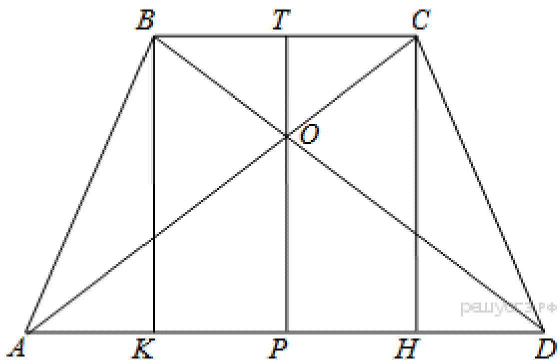
$$\frac{S_{EBCF}}{S_{AEFD}}=\frac{\frac{BC+EF}{2}\cdot h_{BOC}}{\frac{EF+AD}{2}\cdot h_{AOD}}=\frac{a+\frac{4a}{3}}{\frac{4a}{3}+2a}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3a+4a}{4a+6a}\cdot\frac{1}{2}=\frac{7}{20}.$$

Ответ: 7:20.

**14.** = В равнобедренную трапецию, периметр которой равен 160, а площадь равна 1280, можно вписать окружность. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей трапеции до её меньшего основания.

**Решение.**

Проведём построения и введём обозначения как показано на рисунке. В четырёхугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда суммы длин противоположных сторон равны:




$$AB + CD = BC + AD \Leftrightarrow 2AB = BC + AD.$$

Периметр трапеции — сумма длин всех сторон:

$$P = AB + BC + CD + AD \Leftrightarrow P = 2AB + BC + AD \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P = 4AB \Leftrightarrow AB = \frac{P}{4} \Leftrightarrow AB = 40.$$

Следовательно, $BC + AD = 2AB = 80$. Площадь трапеции можно найти как произведение полусуммы оснований на высоту:

$$S = \frac{BC + AD}{2} \cdot TP \Leftrightarrow TP = \frac{2S}{BC + AD} \Leftrightarrow TP = 32.$$

Высоты $BK$, $TP$ и $CH$ равны. Из прямоугольного треугольника $CHD$ найдём $HD$:

$$HD = \sqrt{CD^2 - CH^2} = \sqrt{1600 - 1024} = 24.$$

Рассмотрим треугольники $ABK$ и $CHD$, они прямоугольные, $AB$ равно $CD$, $BK$ равно $CH$, следовательно, треугольники равны, откуда $AK = HD = 24$. Прямые $BK$ и $CH$ перпендикулярны прямой $AD$, поэтому они параллельны, $BK$ равно $CH$, следовательно, четырёхугольник $BCHK$ — параллелограмм, по признаку параллелограмма, откуда $BC = KH$. Рассмотрим выражение для отрезка $AD$:

$$AD = AK + KH + HD \Leftrightarrow AD = 2HD + BC \Leftrightarrow AD - BC = 2HD.$$

Получаем систему уравнений на отрезки $AD$ и BC:

$$\begin{cases} AD + BC = 80, \\ AD - BC = 48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AD = 64, \\ BC = 16. \end{cases}$$

Рассмотрим треугольники $AOD$ и $BOC$, углы CAD и BAC равны как накрест лежащие при параллельных прямых, углы $BOC$ и $AOD$ равны как вертикальные, следовательно, треугольники подобны. Откуда:

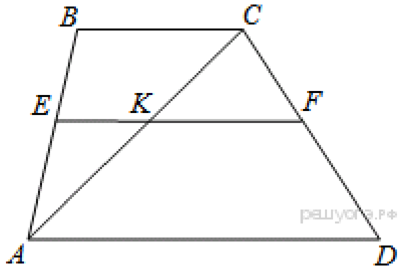
$$\frac{BC}{AD} = \frac{OT}{OP} \Leftrightarrow OP = 4OT.$$

Высота $TP = OT + OP = OT + 4OT = 5OT = 32$. Значит, искомое расстояние $OT = 6,4$.

Ответ: 6,4.

**15.** Прямая, параллельная основаниям трапеции *ABCD*, пересекает её боковые стороны *AB* и *CD* в точках *E* и *F* соответственно. Найдите длину отрезка *EF*, если *AD* = 44, BC = 24, *CF*:*DF* = 3:1.

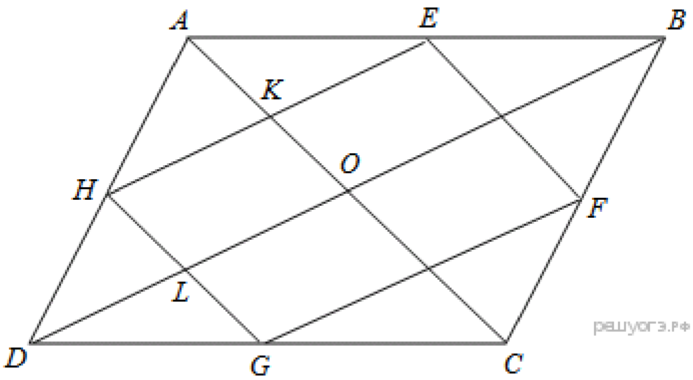
**Решение.**
Проведём построения и введём обозначения как показано на рисунке. Рассмотрим треугольники $KFC$ и $ACD$, угол С — общий, углы $CAD$ и $CKF$ равны друг другу как соответственные углы при параллельных прямых, следовательно, треугольники $KFC$ и $ACD$ подобны. Откуда $\frac{KF}{AD}=\frac{CF}{CD}=\frac{CF}{CF+DF}=\frac{3}{4}$, поэтому $KF=\frac{3}{4}\cdot 44=33.$ Аналогично, из треугольников $EKA$ и $ABC$ получаем, что $EK=BC\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\cdot 24=6.$ Таким образом, $EF=EK+KF=6+33=39.$




Ответ: 39.

**16.** Вершины ромба расположены на сторонах параллелограмма, а стороны ромба параллельны диагоналям параллелограмма. Найдите отношение площадей ромба и параллелограмма, если отношение диагоналей параллелограмма равно 56.

**Решение.**
Введём обозначения как показано на рисунке. Поскольку $HG \parallel AC$ и $HE \parallel BD$, получаем, что $HKOL$ — параллелологрямм, следовательно, углы $KHL$ и $KOL$ равны. Рассмотрим треугольники $ABC$ и $EBF$, угол $EBF$ — общий, углы $BEF$ и $BAC$ равны как соответственные при параллельных прямых, углы $BFE$ и $BCA$ — аналогично, следовательно, треугольники $ABC$ и $BEF$ подобны по двум углам. Откуда $\frac{EF}{AC}=\frac{BE}{AB}$ Аналогично подобны треугольники $ABD$ и $AEH$, откуда $\frac{HE}{BD}=\frac{AE}{AB}$. Пусть сторона ромба равна $a$, а длина короткой диагонали равна $d$. Сложим два полученных уравнения:




$$\frac{EF}{AC}+\frac{HE}{BD}=\frac{AE}{AB}+\frac{BE}{AB}\Leftrightarrow\frac{a}{d}+\frac{a}{56d}=\frac{AE+EB}{AB}\Leftrightarrow.$$

$$\Leftrightarrow\frac{56a+a}{56d}=\frac{AB}{AB}\Leftrightarrow 56d=57a\Leftrightarrow a=\frac{56d}{57}.$$

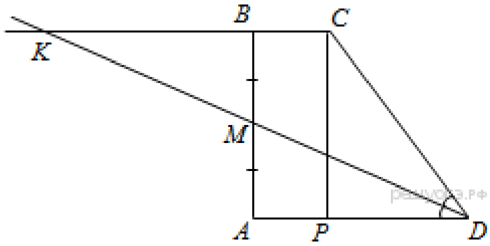
Площадь ромба можно найти как произведение сторон на синус угла между ними: $S_{HEFG}=a^2\sin\angle KHL$. Площадь параллелограмма можно найти как половину произведения диагоналей на синус угла между ними: $S_{ABCD}=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot BD\cdot\sin\angle KOL=d\cdot 56d\cdot\sin\angle KOL.$ Найдём отношение площадей ромба и параллелограмма:

$$\frac{S_{HEFG}}{S_{ABCD}}=\frac{a^2\sin\angle KHL}{\frac{1}{2}\cdot d\cdot 56d\cdot\sin\angle KOL}=\frac{a^2}{28d^2}=\frac{d^2\frac{56^2}{57^2}}{28d^2}=\frac{112}{3249}.$$

Ответ: $\frac{112}{3249}$.

**17.** Боковые стороны $AB$ и $CD$ трапеции $ABCD$ равны соответственно 12 и 20, а основание $BC$ равно 2. Биссектриса угла $ADC$ проходит через середину стороны $AB$. Найдите площадь трапеции.

**Решение.**




Введём обозначения как показано на рисунке. Продолжим биссектрису до пересечения с прямой $BC$ в точке $K$. Углы $CKD$ и $ADK$ равны как накрест лежащие при параллельных прямых. Значит, $\angle ADK = \angle CDK = \angle CKD$, следовательно, треугольник $CKD$ — равнобедренный: $KC = CD = 20$. Найдём $BK$: $BK = CK - BC = 20 - 2 = 18$. Углы $KMB$ и $AMD$ равны как вертикальные. Рассмотрим треугольники $KMB$ и $AMD$: стороны $AM$ и $BM$ равны, углы $KMB$ и $AMD$ равны как вертикальные, углы $KBM$ и $MAD$ равны как накрест лежащие при параллельных прямых, следовательно, эти треугольники равны, откуда $AD = KB = 18$. Проведём прямую $CP$, параллельную $AB$. Прямая $AB$ параллельна $CP$, прямая $AD$ параллельна $BC$, следовательно, четырёхугольник $ABCP$ — параллелограмм, откуда $AP = BC = 2,\ CP = AB = 12$. Найдём $PD$: $PD = AD - AP = 18 - 2 = 16$. Рассмотрим треугольник $CPD$, заметим, что

$$CP^2 + PD^2 = 144 + 256 = 400 = CD^2.$$

Следовательно, по теореме, обратной теореме Пифагора, получаем, что треугольник $CPD$ — прямоугольный, следовательно, $CP$ — высота трапеции. Найдём площадь трапеции:

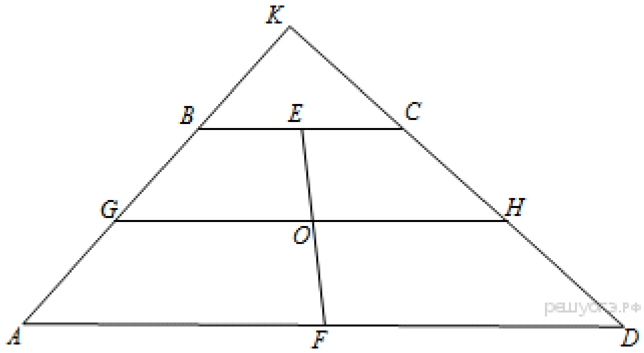
$$S = \frac{BC + AD}{2} \cdot CP = \frac{2 + 18}{2} \cdot 12 = 120.$$

Ответ: 120.

**18.** Углы при одном из оснований трапеции равны 85° и 5°, а отрезки, соединяющие середины противоположных сторон трапеции, равны 11 и 1. Найдите основания трапеции.

**Решение.**

Продлим стороны $AB$ и $CD$ до пересечения в точке $K$. В треугольнике $AKD$ сумма углов $KAD$ и $KDA$ равна 90°, следовательно, величина




$\angle AKD = 180^\circ - \angle KAD - \angle KDA = 90^\circ.$ Значит, треугольник $AKD$ — прямоугольный. Рассмотрим треугольник $AKD$, он прямоугольный, следовательно, центр описанной окружности — середина гипотенузы, то есть точка $F$. Значит, $AF = KF = FD = R = \dfrac{AD}{2}.$

Рассмотрим треугольники $AKF$ и $GKO$, угол $AKF$ — общий, углы $KGO$ и $KAF$ равны как соответственные углы при параллельных прямых, следовательно, эти треугольники подобны по двум углам, коэффициент подобия равен $\dfrac{OK}{KF} = k.$ Аналогично, подобны треугольники $FKD$ и $OKH$, их коэффициент подобия равен $\dfrac{OK}{KF} = k.$ Покажем, что отрезки $GO$ и $OH$ равны: $GO = kAF$, $OH = kFD = kAF = GO.$ Рассмотрим треугольник $GKH$, он прямоугольный, аналогично треугольнику $AKF$ точка $O$ — центр описанной окружности треугольника $GKH$, откуда $GO = KO = OH = \dfrac{GH}{2}.$ Аналогично, в треугольнике $BKC$ — $BE = KE = EC = \dfrac{BC}{2}.$

Получаем: $OH = KO = KE + EO = EC + \dfrac{EF}{2}$, откуда $EC = OH - \dfrac{EF}{2} = \dfrac{GH - EF}{2}$. Значит, $BC = 2EC = GH - EF = 10.$

Отрезок $GH$ — средняя линия трапеции, следовательно, $GH = \dfrac{AD + BC}{2}$, откуда $AD = 2GH - BC = 2 \cdot 11 - 10 = GH + EF = 12.$

Ответ: 10; 12.