

Комбинация многоугольников и окружностей

1. Основание AC равнобедренного треугольника ABC равно 12. Окружность радиуса 8 с центром вне этого треугольника касается продолжений боковых сторон треугольника и касается основания AC в его середине. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC .

2. В параллелограмме $ABCD$ проведена диагональ AC . Точка O является центром окружности, вписанной в треугольник ABC . Расстояния от точки O до точки A и прямых AD и AC соответственно равны 5, 4 и 3. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$.

3. Высоты остроугольного треугольника ABC , проведённые из точек B и C , продолжили до пересечения с описанной окружностью в точках B_1 и C_1 . Оказалось, что отрезок B_1C_1 проходит через центр описанной окружности. Найдите угол BAC .

4. В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основанию BC . Окружность проходит через точки C и D и касается прямой AB в точке E . Найдите расстояние от точки E до прямой CD , если $AD = 14$, $BC = 12$.

5. В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основанию BC . Окружность проходит через точки C и D и касается прямой AB в точке E . Найдите расстояние от точки E до прямой CD , если $AD = 15$, $BC = 14$.

6. В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основанию BC . Окружность проходит через точки C и D и касается прямой AB в точке E . Найдите расстояние от точки E до прямой CD , если $AD = 16$, $BC = 8$.

7. В треугольнике ABC на его медиане BM отмечена точка K так, что $BK : KM = 7 : 3$. Прямая AK пересекает сторону BC в точке P . Найдите отношение площади треугольника BKP к площади четырёхугольника $KPCM$.

8. В выпуклом четырёхугольнике $NPQM$ диагональ NQ является биссектрисой угла PNM и пересекается с диагональю PM в точке S . Найдите NS , если известно, что около четырёхугольника $NPQM$ можно описать окружность, $PQ = 14$, $SQ = 4$.

9. Из вершины прямого угла C треугольника ABC проведена высота CP . Радиус окружности, вписанной в треугольник BSP , равен 96, тангенс угла BAC равен $\frac{8}{15}$. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC .

10. На стороне AB треугольника ABC взята точка D так, что окружность, проходящая через точки A , C и D , касается прямой BC . Найдите AD , если $AC = 40$, $BC = 34$ и $CD = 20$.

11. Диагонали четырёхугольника $ABCD$, вершины которого расположены на окружности, пересекаются в точке M . Известно, что $\angle ABC = 72^\circ$, $\angle BCD = 102^\circ$, $\angle AMD = 110^\circ$. Найдите $\angle ACD$.

12. Длина катета AC прямоугольного треугольника ABC равна 8 см. Окружность с диаметром AC пересекает гипотенузу AB в точке M . Найдите площадь треугольника ABC , если известно, что $AM : MB = 16 : 9$.

13. Углы при одном из оснований трапеции равны 85° и 5° , а отрезки, соединяющие середины противоположных сторон трапеции, равны 11 и 1. Найдите основания трапеции.

14. Боковые стороны AB и CD трапеции $ABCD$ равны соответственно 28 и 35, а основание BC равно 7. Биссектриса угла ADC проходит через середину стороны AB . Найдите площадь трапеции.

15. Из вершины прямого угла C треугольника ABC проведена высота CP . Радиус окружности, вписанной в треугольник BSP , равен 8, тангенс угла BAC равен $\frac{4}{3}$. Найдите радиус вписанной окружности треугольника ABC .

16. На каждой из двух окружностей с радиусами 3 и 4 лежат по три вершины ромба. Найдите его сторону.

17. Медиана BM треугольника ABC является диаметром окружности, пересекающей сторону BC в её середине. Длина стороны AC равна 4. Найдите радиус описанной окружности треугольника ABC .

18. В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основанию BC . Окружность проходит через точки C и D и касается прямой AB в точке E . Найдите расстояние от точки E до прямой CD ,

если $AD = 14$, $BC = 12$.

19. Медиана BM треугольника ABC является диаметром окружности, пересекающей сторону BC в её середине. Найдите длину стороны AC , если радиус описанной окружности треугольника ABC равен 7.

20. Основание AC равнобедренного треугольника ABC равно 16. Окружность радиуса 12 с центром вне этого треугольника касается продолжения боковых сторон треугольника и касается основания AC в его середине. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC .

21. Четырёхугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 25$ и $CD = 16$ вписан в окружность. Диагонали AC и BD пересекаются в точке K , причём $\angle AKB = 60^\circ$. Найдите радиус окружности, описанной около этого четырёхугольника.

Для решения этой задачи необходимо знание формул тригонометрии.

22. Биссектриса CM треугольника ABC делит сторону AB на отрезки $AM = 17$ и $MB = 19$. Касательная к описанной окружности треугольника ABC , проходящая через точку C , пересекает прямую AB в точке D . Найдите CD .

23. В треугольнике ABC угол B равен 120° , а длина стороны AB на $3\sqrt{3}$ меньше полупериметра треугольника. Найдите радиус окружности, касающейся стороны BC и продолжений сторон AB и AC .

24. Окружность, вписанная в треугольник ABC , касается его сторон в точках M , K и P . Найдите углы треугольника ABC , если углы треугольника MKP равны 38° , 78° и 64° .

25. В треугольнике ABC биссектриса угла A делит высоту, проведённую из вершины B , в отношении $13 : 12$, считая от точки B . Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC , если $BC = 10$.

26. В треугольнике ABC известны длины сторон $AB = 84$, $AC = 98$, точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC . Прямая BD , перпендикулярная прямой AO , пересекает сторону AC в точке D . Найдите CD .

27. Окружность проходит через вершины A и C треугольника ABC и пересекает его стороны AB и BC в точках K и E соответственно. Отрезки AE и CK перпендикулярны. Найдите $\angle ABC$, если $\angle KCB = 20^\circ$.

28. В прямоугольном треугольнике ABC катет AC равен 8, катет BC равен 15. Найдите радиус окружности, которая проходит через концы гипотенузы треугольника и касается прямой BC .

29. Точки M и N лежат на стороне AC треугольника ABC на расстояниях соответственно 9 и 11 от вершины A . Найдите радиус окружности, проходящей через точки M и N и касающейся луча AB , если $\cos \angle BAC = \frac{\sqrt{11}}{6}$.

30. На стороне AB треугольника ABC взята точка D так, что окружность, проходящая через точки A , C и D , касается прямой BC . Найдите AD , если $AC = 12$, $BC = 18$ и $CD = 8$.

31. На стороне BC остроугольного треугольника ABC ($AB \neq AC$) как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M , $AD = 27$, $MD = 18$, H — точка пересечения высот треугольника ABC . Найдите AH .

32. В трапеции $ABCD$ основания AD и BC равны соответственно 49 и 21, а сумма углов при основании AD равна 90° . Найдите радиус окружности, проходящей через точки A и B и касающейся прямой CD , если $AB = 20$.

33. Из вершины прямого угла C треугольника ABC проведена высота CP . Радиус окружности, вписанной в треугольник BSP , равен 45, тангенс угла BAC равен $\frac{3}{4}$. Найдите радиус вписанной окружности треугольника ABC .

34. В треугольнике ABC биссектриса угла A делит высоту, проведённую из вершины B , в отношении $5 : 4$, считая от точки B . Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC , если $BC = 6$.

35. На стороне BC остроугольного треугольника ABC ($AB \neq AC$) как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M , $AD = 81$, $MD = 9$, H — точка пересечения высот треугольника ABC . Найдите AH .

36. В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основанию BC . Окружность проходит через точки C и D и касается прямой AB в точке E . Найдите расстояние от точки E до прямой CD , если $AD = 14$, $BC = 7$.

37. Биссектриса CM треугольника ABC делит сторону AB на отрезки $AM = 7$ и $MB = 17$. Касательная к описанной окружности треугольника ABC , проходящая через точку C , пересекает прямую AB в точке D . Найдите CD .

38. Окружность, вписанная в треугольник ABC , касается его сторон в точках M , K и P . Найдите углы треугольника ABC , если углы треугольника MKP равны 62° , 57° и 61° .

39. Точки M и N лежат на стороне AC треугольника ABC на расстояниях соответственно 12 и 45 от вершины A . Найдите радиус окружности, проходящей через точки M и N и касающейся луча AB , если $\cos \angle BAC = \frac{\sqrt{15}}{4}$.

40. На стороне AB треугольника ABC взята точка D так, что окружность, проходящая через точки A , C и D , касается прямой BC . Найдите AD , если $AC = 48$, $BC = 28$ и $CD = 24$.

41. В трапеции $ABCD$ основания AD и BC равны соответственно 34 и 14, а сумма углов при основании AD равна 90° . Найдите радиус окружности, проходящей через точки A и B и касающейся прямой CD , если $AB = 12$.

42. Четырёхугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 2$ и $CD = 5$ вписан в окружность. Диагонали AC и BD пересекаются в точке K , причём $\angle AKB = 60^\circ$. Найдите радиус окружности, описанной около этого четырёхугольника.

43. В треугольнике ABC известны длины сторон $AB = 8$, $AC = 64$, точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC . Прямая BD , перпендикулярная прямой AO , пересекает сторону AC в точке D . Найдите CD .

44. В параллелограмме $ABCD$ проведена диагональ AC . Точка O является центром окружности, вписанной в треугольник ABC . Расстояния от точки O до точки A и прямых AD и AC соответственно равны 25, 8 и 7. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$.