

Комбинация многоугольников и окружностей

1. Основание AC равнобедренного треугольника ABC равно 12. Окружность радиуса 8 с центром вне этого треугольника касается продолжений боковых сторон треугольника и касается основания AC в его середине. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC .

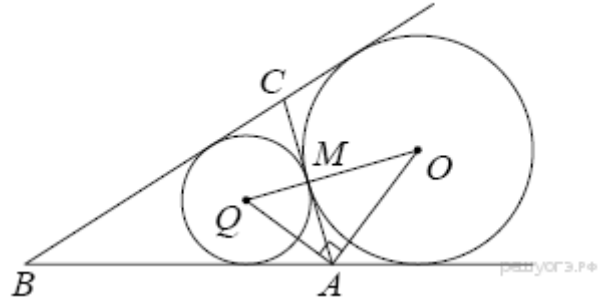
Решение.

Пусть O — центр данной окружности, а Q — центр окружности, вписанной в треугольник ABC . Точка касания M окружностей делит AC пополам. AQ и AO — биссектрисы смежных углов, значит, угол OAQ прямой. Из прямоугольного треугольника OAQ получаем: $AM^2 = MQ \cdot MO$.

Следовательно,

$$QM = \frac{AM^2}{OM} = \frac{36}{8} = 4,5.$$

Ответ: 4,5.



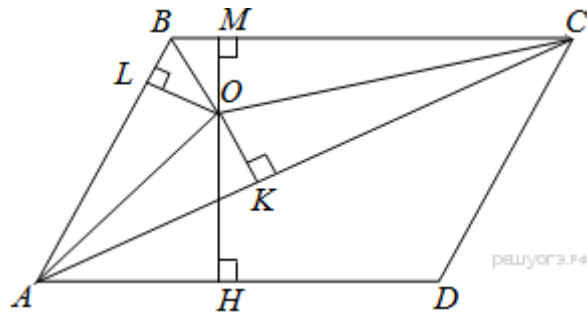
Дублирует задание 314827.

2. В параллелограмме $ABCD$ проведена диагональ AC . Точка O является центром окружности, вписанной в треугольник ABC . Расстояния от точки O до точки A и прямых AD и AC соответственно равны 5, 4 и 3. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$.

Решение.

Проведём построения и введём обозначения как показано на рисунке. Пусть O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC . Центр вписанной окружности — это точка пересечения биссектрис, поэтому AO , BO , CO — биссектрисы. Из прямоугольного треугольника AOK по теореме Пифагора найдём AK :

$$AK = \sqrt{AO^2 - OK^2} = \sqrt{25 - 9} = 4.$$



Отрезки OM , OL и OK равны как радиусы вписанной в треугольник ABC окружности, то есть $OM = OL = OK = 3$. Рассмотрим треугольники ALO и AOK , они прямоугольные, углы LAO и OAK равны, AO — общая, следовательно, треугольники равны, откуда $AL = AK = 4$. Аналогично из равенства треугольников COM и COK получаем $MC = CK$, а из равенства треугольников BOL и BOM — $BL = BM$. Площадь треугольника ABC можно найти как произведение радиуса вписанной окружности на полупериметр:

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= \frac{AB + BC + AC}{2} \cdot OK = \frac{AL + LB + BM + MC + CK + AK}{2} \cdot OK = \\ &= \frac{(8 + 2BM + 2MC)}{2} \cdot 3 = 3(4 + BM + MC). \end{aligned}$$

Площадь параллелограмма равна произведению высоты на основание:

$$S_{ABCD} = MH \cdot BC = (MO + OH) \cdot (BM + MC) = 7(BM + MC).$$

Рассмотрим треугольники ABC и ACD , AB равно CD , AD равно BC , углы ABC и ADC равны, следовательно, треугольники ABC и ACD равны. Поэтому площадь треугольника ABC равна половине площади параллелограмма:

$$3(4 + BM + MC) = \frac{1}{2} \cdot 7(BM + MC) \Leftrightarrow BM + MC = 24 \Leftrightarrow BC = 24.$$

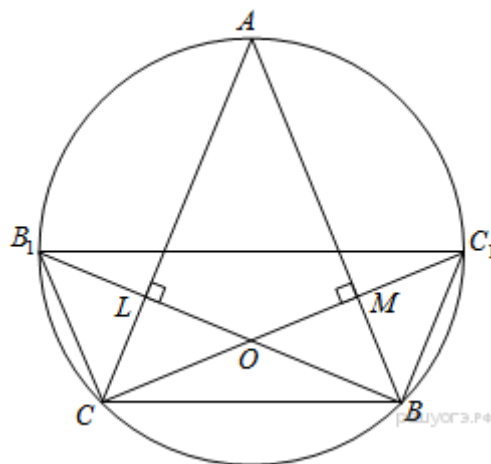
Площадь параллелограмма равна: $S_{ABCD} = BC \cdot MH = 24 \cdot 7 = 168$.

Ответ: 168.

3. Высоты остроугольного треугольника ABC , проведённые из точек B и C , продолжили до пересечения с описанной окружностью в точках B_1 и C_1 . Оказалось, что отрезок B_1C_1 проходит через центр описанной окружности. Найдите угол BAC .

Решение.

Введём обозначения как показано на рисунке. Отрезок B_1C_1 проходит через центр описанной окружности, следовательно, B_1C_1 — диаметр. Углы BB_1C , CAB и CC_1B — вписанные и опираются на одну и ту же дугу, значит, они равны. Из прямоугольного треугольника B_1OC : $\angle B_1OC = 90^\circ - \angle BB_1C$. Из прямоугольного треугольника LCO : $\angle LCO = 90^\circ - \angle B_1OC = \angle BB_1C = \angle BAC$. Рассмотрим прямоугольный треугольник CAM , углы BAC и ACC_1 равны, значит $\angle BAC = \angle ACC_1 = 90^\circ / 2 = 45^\circ$.



Ответ: 45° .

4. В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основанию BC . Окружность проходит через точки C и D и касается прямой AB в точке E . Найдите расстояние от точки E до прямой CD , если $AD = 14$, $BC = 12$.

Решение.

Пусть T — точка пересечения прямых AB и CD , P — проекция точки E на прямую CD , Q — проекция точки C на прямую AD (см. рис.). Обозначим $\angle CDA = \alpha$, $CD = x$.

Поскольку $QD = AD - AQ = AD - BC = 2$, получаем, что

$$\cos \alpha = \frac{QD}{DC} = \frac{2}{x}.$$

Из подобия треугольников TBC и TAD находим, что $TC = 6x$.

Поэтому

$$TE^2 = TD \cdot TC = 42x^2.$$

Следовательно,

$$EP = TE \cos \angle TEP = TE \cos \angle TDA = TE \cos \alpha = x\sqrt{42} \cdot \frac{2}{x} = 2\sqrt{42}.$$

Ответ: $2\sqrt{42}$.

5. В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основанию BC . Окружность проходит через точки C и D и касается прямой AB в точке E . Найдите расстояние от точки E до прямой CD , если $AD = 15$, $BC = 14$.

Решение.

Пусть T — точка пересечения прямых AB и CD , P — проекция точки E на прямую CD , Q — проекция точки C на прямую AD (см. рис.). Обозначим $\angle CDA = \alpha$, $CD = x$.

Поскольку $QD = AD - AQ = AD - BC = 1$, получаем, что

$$\cos \alpha = \frac{QD}{DC} = \frac{1}{x}.$$

Из подобия треугольников TBC и TAD находим, что $TC = 14x$.

Поэтому

$$TE^2 = TD \cdot TC = 210x^2.$$

Следовательно,

$$EP = TE \cos \angle TEP = TE \cos \angle TDA = TE \cos \alpha = x\sqrt{210} \cdot \frac{1}{x} = \sqrt{210}.$$

Ответ: $\sqrt{210}$.

6. В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основанию BC . Окружность проходит через точки C и D и касается прямой AB в точке E . Найдите расстояние от точки E до прямой CD , если $AD = 16$, $BC = 8$.

Решение.

Пусть T — точка пересечения прямых AB и CD , P — проекция точки E на прямую CD , Q — проекция точки C на прямую AD (см. рис.). Обозначим $\angle CDA = \alpha$, $CD = x$.

Поскольку $QD = AD - AQ = AD - BC = 8$, получаем, что

$$\cos \alpha = \frac{QD}{DC} = \frac{8}{x}.$$

Из подобия треугольников TBC и TAD находим, что $TC = x$.

Поэтому

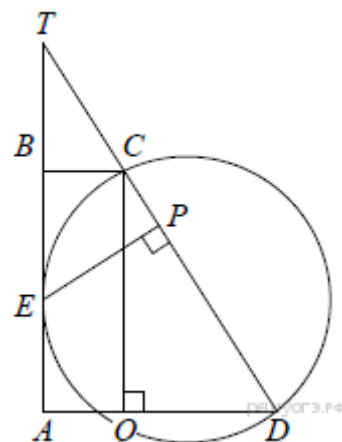
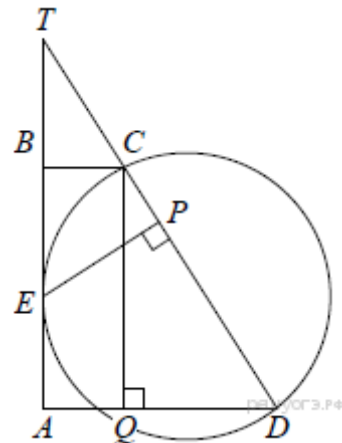
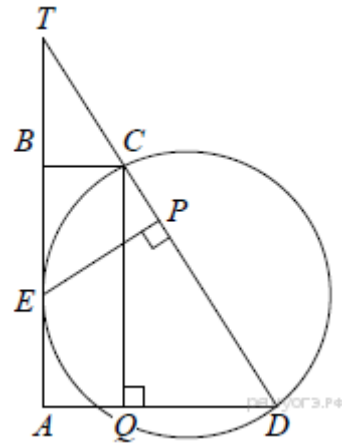
$$TE^2 = TD \cdot TC = 2x^2.$$

Следовательно,

$$EP = TE \cos \angle TEP = TE \cos \angle TDA = TE \cos \alpha = x\sqrt{2} \cdot \frac{8}{x} = 8\sqrt{2}.$$

Ответ: $8\sqrt{2}$.

7. В треугольнике ABC на его медиане BM отмечена точка K так, что $BK : KM = 7 : 3$. Прямая AK пересекает сторону BC в точке P . Найдите отношение площади треугольника BKP к площади четырёхугольника $KPCM$.



Решение.

Медиана KM разбивает треугольник AKC на два равновеликих треугольника — пусть их площади равны по $3S$. Поскольку $\frac{S_{ABK}}{S_{AMK}} = \frac{BK}{MK} = \frac{7}{3}$, получаем, что $S_{ABK} = 7S$.

Пусть $S_{PBK} = X$ и $S_{PCK} = Y$. Тогда $\frac{7S}{X} = \frac{AK}{KP} = \frac{6S}{Y}$, отсюда $X = \frac{7Y}{6}$. Далее, $10S = S_{ABM} = S_{CBM} = X + Y + 3S$, а тогда $X + Y + \frac{7Y}{6} + Y = \frac{13Y}{6} = 7S$, то есть $Y = \frac{42S}{13}$ и $X = \frac{49S}{13}$.

Получаем, что $S_{BKP} : S_{KPCM} = \frac{49S}{13} : \left(3S + \frac{42S}{13}\right) = 49 : 81$.

Ответ: 49 : 81.

8. В выпуклом четырёхугольнике $NPQM$ диагональ NQ является биссектрисой угла PNM и пересекается с диагональю PM в точке S . Найдите NS , если известно, что около четырёхугольника $NPQM$ можно описать окружность, $PQ = 14$, $SQ = 4$.

Решение.

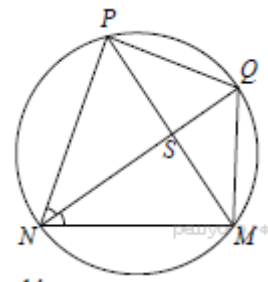
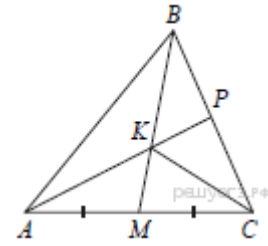
Поскольку $\angle QPS = \angle QPM = \angle MNQ = \angle QNP$ (см. рис.), треугольник PQS подобен треугольнику NQP по двум углам (угол при вершине Q общий). Поэтому

$$\frac{QS}{PQ} = \frac{PQ}{QN}.$$

Пусть $NS = x$. Тогда $\frac{4}{14} = \frac{14}{x+4}$.

Из этого уравнения находим, что $x = 45$.

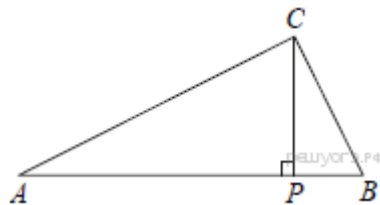
Ответ: 45.



9. Из вершины прямого угла C треугольника ABC проведена высота CP . Радиус окружности, вписанной в треугольник BCP , равен 96, тангенс угла BAC равен $\frac{8}{15}$. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC .

Решение.

Заметим, что $\angle CAB = 90^\circ - \angle CBA = \angle PCB$, так что треугольник ABC подобен треугольнику CBP .

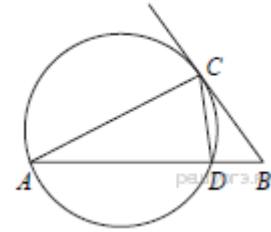


Пусть радиус окружности, вписанной в треугольник ABC , равен r , тогда $\frac{96}{r} = \frac{BC}{BA} = \sin BAC$. Поскольку тангенс угла BAC равен $\frac{8}{15}$, получаем, что, $\sin BAC = \frac{8}{17}$. Значит, $\frac{96}{r} = \frac{8}{17}$, откуда $r = 204$.

10. На стороне AB треугольника ABC взята точка D так, что окружность, проходящая через точки A , C и D , касается прямой BC . Найдите AD , если $AC = 40$, $BC = 34$ и $CD = 20$.

Решение.

Из теоремы об угле между касательной и хордой следует, что $\angle BCD = \angle CAD = \angle CAB$, значит, треугольник ABC подобен треугольнику CBD по двум углам, причём коэффициент подобия равен $\frac{AC}{CD} = 2$ (см. рисунок). Тогда



$$AB = 2BC = 2 \cdot 34 = 68; \quad BD = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \cdot 34 = 17.$$

Следовательно,

$$AD = AB - BD = 68 - 17 = 51.$$

Ответ: 51.

11. Диагонали четырёхугольника $ABCD$, вершины которого расположены на окружности, пересекаются в точке M . Известно, что $\angle ABC = 72^\circ$, $\angle BCD = 102^\circ$, $\angle AMD = 110^\circ$. Найдите $\angle ACD$.

Решение.

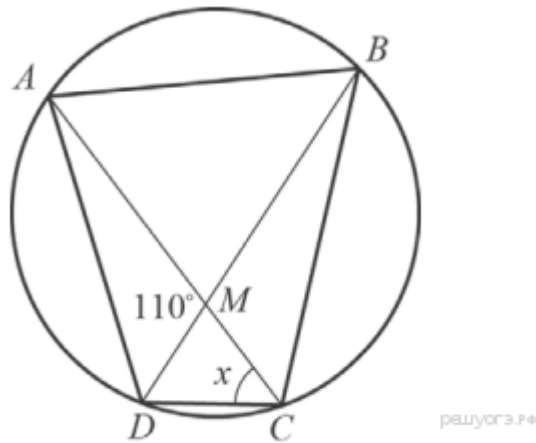
Пусть $\angle ACD = x$.

$$\angle DMC = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ;$$

$$\angle DMC = \angle DBC + \angle BCA;$$

$$\angle BCA = 102^\circ - x; \quad \angle DBC + 102^\circ - x = 70^\circ; \quad x = \angle DBC + 32^\circ.$$

$$\angle DBC + \angle ABD = 72^\circ; \quad \angle ABD = x; \quad \angle DBC = 72^\circ - x; \quad 2x = 104^\circ, \quad x = 52^\circ.$$



Ответ: 52° .

12. Длина катета AC прямоугольного треугольника ABC равна 8 см. Окружность с диаметром AC пересекает гипотенузу AB в точке M . Найдите площадь треугольника ABC , если известно, что $AM : MB = 16 : 9$.

Решение.

Пусть $BC = y$ см, $AM = 16x$ см и $MB = 9x$ см. Поэтому гипотенуза $AB = 25x$ см. По теореме Пифагора:

$$y^2 = 625x^2 - 64.$$

По теореме о секущей и касательной

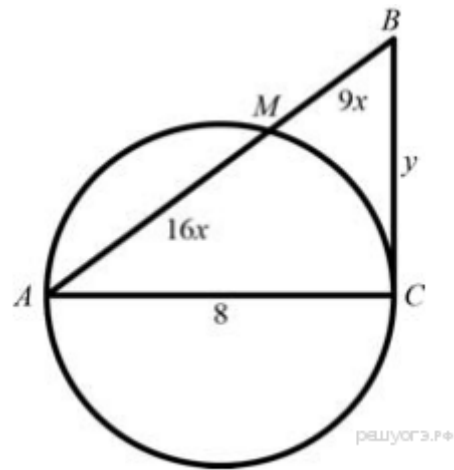
$$y^2 = 25x \cdot 9x = 225x^2.$$

Следовательно, $225x^2 = 625x^2 - 64$, откуда $x^2 = \frac{4}{25}$.

Тогда $y^2 = 225 \cdot \frac{4}{25}$; $y = \frac{15 \cdot 2}{5} = 6$.

Следовательно, площадь треугольника равна

$$\frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 = 24 \text{ см}^2.$$



Ответ: 24 см^2 .

13. Углы при одном из оснований трапеции равны 85° и 5° , а отрезки, соединяющие середины противоположных сторон трапеции, равны 11 и 1. Найдите основания трапеции.

Решение.

Пусть $ABCD$ — данная трапеция, AD — большее основания, K и L — середины сторон AB и CD соответственно. Сумма углов при одном из оснований равна $85^\circ + 5^\circ = 90^\circ$, так что это большее основание AD .

Продолжим боковые стороны трапеции до пересечения в точке O (см. рис.).

Легко видеть, что $\angle AOD = 180^\circ - (85^\circ + 5^\circ) = 90^\circ$.

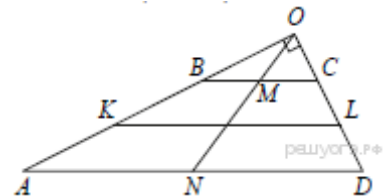
Пусть N — середина отрезка AD . Тогда $ON = \frac{AD}{2}$ — медиана прямоугольного треугольника AOD .

Поскольку медиана ON делит пополам любой отрезок с концами на сторонах AO и DO треугольника AOD , параллельный стороне AD , она пересекает основание BC также в его середине M .

Значит, $OM = \frac{BC}{2}$. Таким образом, $MN = \frac{AD - BC}{2}$. Средняя линия KL трапеции при этом равна $\frac{AD + BC}{2}$.

Получаем, что $AD = MN + KL = 11 + 1 = 12$; $BC = KL - MN = 11 - 1 = 10$.

Ответ: 12; 10.



14. Боковые стороны AB и CD трапеции $ABCD$ равны соответственно 28 и 35, а основание BC равно 7. Биссектриса угла ADC проходит через середину стороны AB . Найдите площадь трапеции.

Решение.

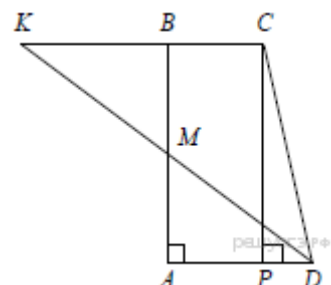
Пусть M — середина AB (см. рис.). Продолжим биссектрису DM угла ADC до пересечения с продолжением основания BC в точке K . Поскольку $\angle CKD = \angle ADK = \angle CDK$, треугольник KCD равнобедренный, $KC = CD = 35$. Тогда $KB = KC - BC = 35 - 7 = 28$.

Из равенства треугольников AMD и BMK следует, что $AD = BK = 28$. Проведём через вершину C прямую, параллельную стороне AB , до пересечения с основанием AD в точке P . Треугольник CPD прямоугольный, так как $CD^2 = 35^2 = 28^2 + 21^2 = PC^2 + PD^2$.

Поэтому CP — высота трапеции. Следовательно,

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC)CP = 490.$$

Ответ: 490.



15. Из вершины прямого угла C треугольника ABC проведена высота CP . Радиус окружности, вписанной в треугольник BCP , равен 8, тангенс угла BAC равен $\frac{4}{3}$. Найдите радиус вписанной окружности треугольника ABC .

Решение.

Угол BAC равен углу BCP так как $\angle BAC = 90^\circ - \angle ABC$ и $\angle BCP = 90^\circ - \angle ABC$. Так как тангенс это отношение противолежащего катета к прилежащему, имеем:

$\operatorname{tg} \angle BCP = \frac{BP}{PC} \Leftrightarrow \frac{4}{3} = \frac{BP}{PC}$. Тогда $BP = 4x$, $PC = 3x$, а гипотенуза $BC = 5x$ по теореме Пифагора. Площадь треугольника равна произведению половины его периметра на радиус вписанной окружности, но площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения катетов, имеем:

$$\frac{1}{2}BP \cdot PC = \frac{P \cdot r_1}{2} \Leftrightarrow 6x^2 = 6x \cdot 8 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8, \\ x = 0. \end{cases}$$

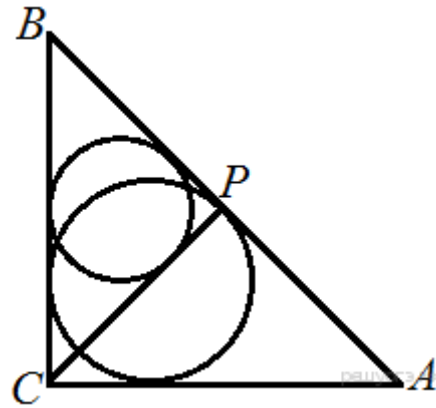
Таким образом, $BP = 32$, $PC = 24$, а $BC = 40$. Так как $\operatorname{tg} \angle BAC = \frac{4}{3}$, то $AC = 30$, а $AB = 50$ по теореме Пифагора.

В треугольнике ABC площадь равна произведению половины его периметра на радиус вписанной в него окружности, но площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения катетов, имеем:

$$S = \frac{P \cdot r}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 40 = \frac{1}{2} \cdot 120 \cdot r \Leftrightarrow r = 10.$$

Ответ: $r = 10$.

16. На каждой из двух окружностей с радиусами 3 и 4 лежат по три вершины ромба. Найдите его сторону.



Решение.

Пусть вершины A, B , и C ромба $ABCD$ лежат на окружности радиуса 3, а вершины A, B , и D лежат на окружности радиуса 4. Примем сторону ромба за x , а величину угла BAC за α .

Тогда по теореме синусов для треугольника ABC

$$\frac{x}{\sin \alpha} = 6.$$

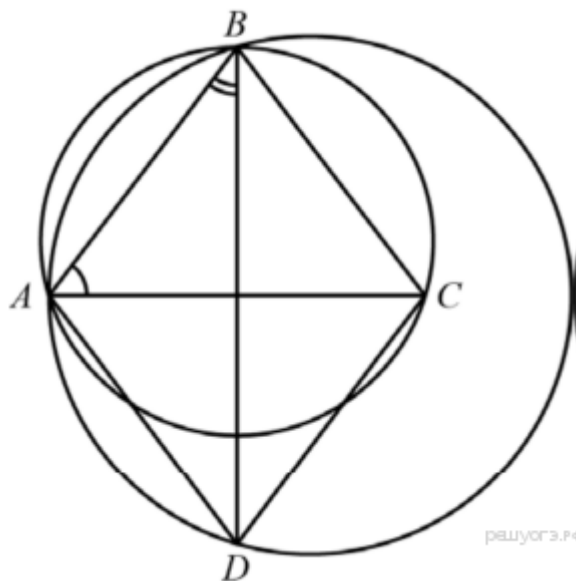
Аналогично по теореме синусов для треугольника ABD :

$$\frac{x}{\sin(90 - \alpha)} = 8.$$

Значит, $\sin \alpha = \frac{x}{6}$ и $\cos \alpha = \frac{x}{8}$. Получаем уравнение

$$\frac{x^2}{36} + \frac{x^2}{64} = 1.$$

Откуда $x = \pm 4,8$. Следовательно, сторона ромба равна 4,8.

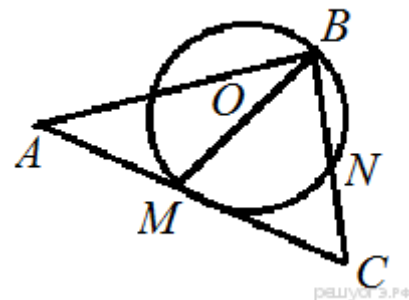


Ответ: 4,8.

17. Медиана BM треугольника ABC является диаметром окружности, пересекающей сторону BC в её середине. Длина стороны AC равна 4. Найдите радиус описанной окружности треугольника ABC .

Решение.

Медиана BM делит AC пополам. Центр окружности лежит на середине медианы BM , тогда ON — средняя линия в треугольнике BMC , где O — центр окружности, а N — точка пересечения этой окружности стороны BC . Средняя линия в треугольнике равна половине основания, поэтому $ON = 1$. Средняя линия ON является радиусом окружности. Так как медиана BM является диаметром, то $BM = 2ON = 2$. Проведем MN в треугольнике BMC . Так как угол BNM опирается на диаметр BM , то $\angle BNM = 90^\circ$, таким образом, треугольник BNM — прямоугольный. Так как MN — средняя линия, то она параллельна AB , тогда треугольник ABC — прямоугольный. Центр описанной вокруг прямоугольного треугольника окружности лежит на середине гипотенузы, таким образом, радиус описанной вокруг треугольника ABC окружности равен 2.



18. В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основанию BC . Окружность проходит через точки C и D и касается прямой AB в точке E . Найдите расстояние от точки E до прямой CD , если $AD = 14$, $BC = 12$.

Проведём построения как показано на рисунке. Расстояние от точки E до прямой CD — отрезок EF . Продолжим стороны AB и CD до пересечения в точке M , проведём отрезок CK , параллельный AB . Рассмотрим четырёхугольник $ABCK$ прямая BC параллельна AK , прямая AB параллельна прямой CK , угол BAK — прямой, следовательно, $ABCK$ — прямоугольник. Откуда $AB = KC$. Значит,

По теореме о касательной и секущей:

Откуда $ME = \sqrt{42CD^2} = CD\sqrt{42}$. Рассмотрим треугольники MEF и MAD , они прямоугольные, угол BMC — общий, следовательно, эти треугольники подобны. Значит, углы MEF и ADM равны, а значит, $\cos \angle MEF = \cos \angle ADM$. Найдём EF из прямоугольного треугольника MEF :

ОТВЕТ: $2\sqrt{42}$.

19. Медиана BM треугольника ABC является диаметром окружности, пересекающей сторону BC в её середине. Найдите длину стороны AC , если радиус описанной окружности треугольника ABC равен 7.

19. Медиана BM треугольника ABC является диаметром окружности, пересекающей сторону BC в её середине. Найдите длину стороны AC , если радиус описанной окружности треугольника ABC равен 7.

Решение.

Введём обозначения как показано на рисунке. Рассмотрим треугольник $ВОК$: — он равнобедренный, следовательно, $\angle OBK = \angle BKO$. Аналогично в треугольнике $ОКМ$ имеем: $\angle ОКМ = \angle ОКМ$. Теперь рассмотрим треугольник $МВК$: сумма его углов равна 180° , поэтому

$$\angle MBK + \angle BKM + \angle KMO = 180^\circ.$$

Поскольку кроме этого $\angle BKM = \angle BKO + \angle ОКМ$, имеем:

$$2\angle BKO + 2\angle ОКМ = 180^\circ \Leftrightarrow \angle BKO + \angle ОКМ = 90^\circ \Leftrightarrow \angle BKM = 90^\circ.$$

Рассмотрим треугольники $ВМК$ и $МКС$: они прямоугольные, имеют общий катет и $ВК$ равно $КС$, следовательно, эти треугольники равны, а значит, $ВМ = МС$.

Точка $М$ отстоит на равное расстояние от всех трёх вершин треугольника, $АМ = МС = ВМ$, следовательно, точка $М$ — центр окружности, описанной около треугольника $АВС$. Найдём сторону $АС$:

$$АМ = \frac{АС}{2} \Leftrightarrow r = \frac{АС}{2} \Leftrightarrow АС = 2r = 2 \cdot 7 = 14.$$

Ответ: 14.

20. Основание $АС$ равнобедренного треугольника $АВС$ равно 16. Окружность радиуса 12 с центром вне этого треугольника касается продолжения боковых сторон треугольника и касается основания $АС$ в его середине. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник $АВС$.

Решение.

Введём обозначения, приведённые на рисунке. Лучи $АО$ и $АQ$ — соответственно биссектрисы углов $САР$ и $ВАС$, поскольку эти лучи проходят через центры вписанных окружностей. $М$ — середина основания $АС$, следовательно $АМ = МС = \frac{16}{2} = 8$. Углы QAM и $АОМ$ равны друг другу, как углы с взаимно перпендикулярными сторонами. Рассмотрим треугольники QAM и $АМО$ — они прямоугольные и имеют равные углы QAM и $АОМ$, следовательно эти треугольники подобны:

$$\frac{АО}{АQ} = \frac{АМ}{QM} = \frac{ОМ}{АМ}.$$

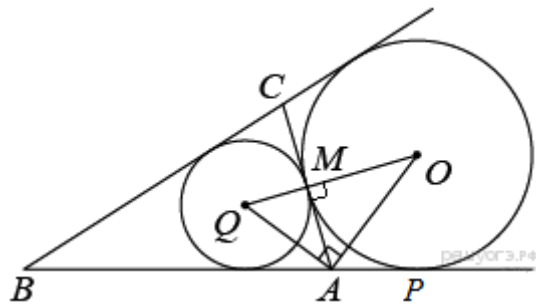
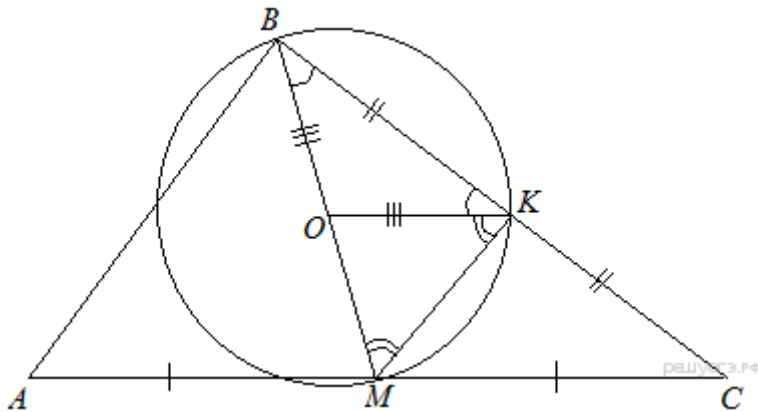
Отсюда следует, что радиус вписанной окружности:

$$r = QM = \frac{АМ^2}{ОМ} = \frac{8^2}{12} = \frac{16}{3}.$$

Ответ: $\frac{16}{3}$.

21. Четырёхугольник $АВСD$ со сторонами $АВ = 25$ и $CD = 16$ вписан в окружность. Диагонали $АС$ и BD пересекаются в точке K , причём $\angle AKB = 60^\circ$. Найдите радиус окружности, описанной около этого четырёхугольника.

Для решения этой задачи необходимо знание формул тригонометрии.



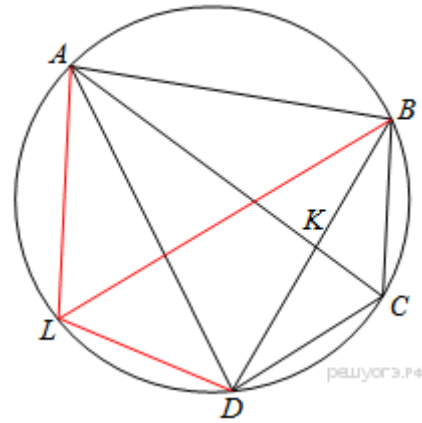
Решение.

Проведём через точку D прямую, параллельную диагонали AC . Дуги AL и CD равны, следовательно, равны и стягивающие их хорды: $AL = CD = 16$.

Вертикальные углы AKB и CKD равны. Углы CKD и LDK равны как накрест лежащие: $\angle CKD = \angle LDK = 60^\circ$.

Четырёхугольник $ABDL$ вписан в окружность, следовательно, суммы противоположных углов равны 180° , откуда $\angle LAB = 180^\circ - \angle LDK = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

Рассмотрим треугольник ABL . По теореме косинусов:



$$BL = \sqrt{AL^2 + AB^2 - 2AL \cdot AB \cos 120^\circ} = \sqrt{256 + 625 - 2 \cdot 16 \cdot 25 \cdot \cos 120^\circ} = \sqrt{1281}.$$

Найдём радиус описанной вокруг треугольника ABL окружности по теореме синусов:

$$R = \frac{BL}{2 \sin \angle BAL} = \frac{\sqrt{1281}}{2 \sin 120^\circ} = \frac{\sqrt{1281}}{2 \sin 60^\circ} = \frac{\sqrt{1281}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{1281}{3}} = \sqrt{427}.$$

Ответ: $\sqrt{427}$.

Приведём другое решение.

Передвинем хорду CD так, чтобы она стала параллельна стороне AB (см. рисунок). Заметим, что при таком движении угол AKB остаётся равен 60° , поскольку он равен полусумме дуг AB и CD . Параллельные прямые отсекают равные дуги, поэтому дуги AD и BC равны. Углы ACD и BDC равны, как вписанные углы, опирающиеся на равные дуги. Таким образом, треугольник KDC — равнобедренный:

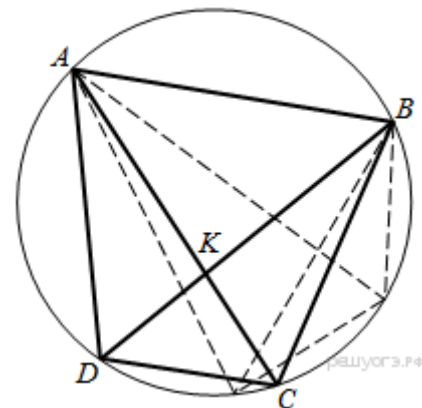
$$\angle KDC = \angle KCD = (180^\circ - 60^\circ)/2 = 60^\circ.$$

Все углы треугольника KDC равны 60° , следовательно, треугольник KDC — равносторонний, значит $KD = KC = CD = 16$. Аналогично можно показать, что треугольник AKB — равносторонний, откуда $AK = BK = AB = 25$.

Рассмотрим треугольник BDC , $BD = BK + KD = 25 + 16 = 41$. По теореме косинусов:

$$BC = \sqrt{BD^2 + CD^2 - 2 \cdot BD \cdot CD \cos \angle BDC} = \sqrt{41^2 + 16^2 - 2 \cdot 41 \cdot 16 \cos 60^\circ} = \sqrt{1281}.$$

По теореме синусов:
$$R = \frac{BC}{2 \sin \angle BDC} = \frac{\sqrt{1281}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{1281}{3}} = \sqrt{427}.$$

**Приведём другое решение.**

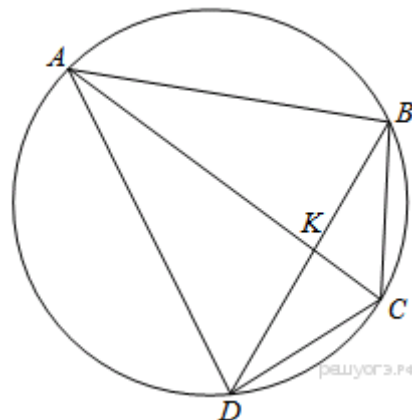
Рассмотрим треугольник BKC , сумма углов треугольника равна 180° : $\angle CBD + \angle BCA + \angle CKB = 180^\circ$. Углы AKB и CKB являются смежными, следовательно, $\angle CKB = 180^\circ - \angle AKB$, откуда:

$$\begin{aligned} \angle CBD + \angle BCA + \angle CKB = 180^\circ &\Leftrightarrow \angle CBD + \angle BCA + 180^\circ - \angle AKB = 180^\circ \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \angle CBD + \angle BCA = \angle AKB \Leftrightarrow \angle CBD + \angle BCA = 60^\circ. \end{aligned}$$

Пусть R — радиус описанной окружности, угол BCA обозначим как α . Рассмотрим треугольник BCA , он вписан в окружность, следовательно, по теореме синусов:

$$R = \frac{AB}{2 \sin \angle BCA} \Leftrightarrow AB = 2R \sin \angle BCA.$$

Аналогично, из треугольника CBD :



$$CD = 2R \sin \angle CBD \Leftrightarrow 2R \sin(60^\circ - \angle \alpha) \Leftrightarrow 2R \sin 60^\circ \cos \alpha - \cos 60^\circ \sin \alpha = 2R \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha \right).$$

Разделим CD на AB :

$$\frac{CD}{AB} = \frac{16}{25} = \frac{\sqrt{3} \cos \alpha - \sin \alpha}{2 \sin \alpha}.$$

Откуда:

$$32 \sin \alpha = 25\sqrt{3} \cos \alpha - 25 \sin \alpha \Leftrightarrow 57 \sin \alpha = 25\sqrt{3} \cos \alpha \Leftrightarrow \operatorname{ctg} \alpha = \frac{57}{25\sqrt{3}}.$$

Найдём $\sin \alpha$:

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}} = \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{57^2}{25^2 \cdot 3}}} = \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{57 \cdot 19}{625}}} = \sqrt{\frac{625}{1708}} = \frac{25}{2\sqrt{427}}.$$

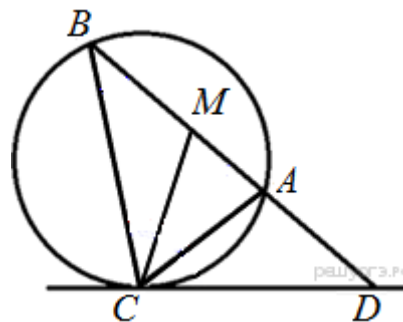
Таким образом, радиус описанной окружности равен:

$$R = \frac{AB}{2 \sin \angle \alpha} = \frac{25}{2 \cdot \frac{25}{2\sqrt{427}}} = \sqrt{427}.$$

22. Биссектриса CM треугольника ABC делит сторону AB на отрезки $AM = 17$ и $MB = 19$. Касательная к описанной окружности треугольника ABC , проходящая через точку C , пересекает прямую AB в точке D . Найдите CD .

Решение.

Угол ACD равен половине дуги на которую он опирается, поскольку это угол, образованный касательной к окружности и секущей, проведённой через точку касания. Угол ABC — вписанный, поэтому он также равен половине дуги, на которую опирается. Углы ABC и ACD опираются на одну и ту же дугу, следовательно, они равны. Рассмотрим треугольники ACD и BCD , угол BDC — общий, углы ABC и ACD равны, следовательно, треугольники подобны, откуда $\frac{CD}{BD} = \frac{AC}{BC} = \frac{AD}{CD}$. Биссектриса угла делит сторону треугольника на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам: $\frac{AC}{BC} = \frac{AM}{BM} = \frac{17}{19}$. Получаем:



$$AD = \frac{17}{19}CD, \quad BD = \frac{19}{17}CD, \quad BD = AD + AB = AD + 17 + 19 = AD + 36.$$

Найдём CD :

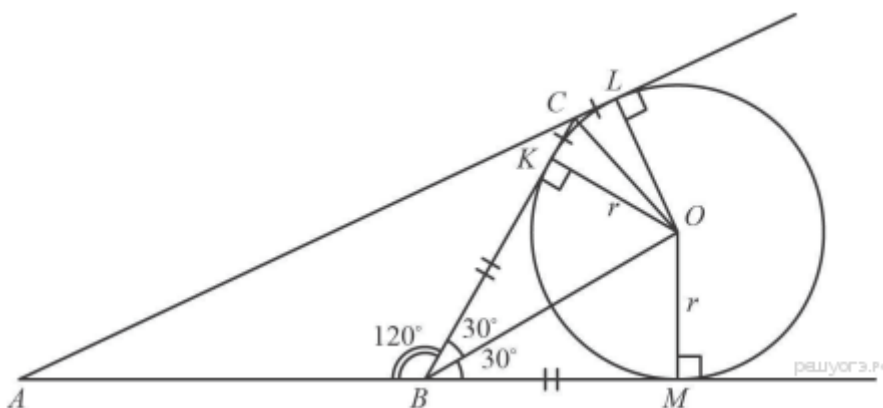
$$\begin{aligned} \frac{19}{17}CD &= \frac{17}{19}CD + 36 \Leftrightarrow CD \left(\frac{19}{17} - \frac{17}{19} \right) = 36 \Leftrightarrow CD \frac{19 \cdot 19 - 17 \cdot 17}{17 \cdot 19} = 36 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow CD = \frac{36 \cdot 17 \cdot 19}{(19 - 17)(19 + 17)} \Leftrightarrow CD = 161,5. \end{aligned}$$

Ответ: 161,5.

23. В треугольнике ABC угол B равен 120° , а длина стороны AB на $3\sqrt{3}$ меньше полупериметра треугольника. Найдите радиус окружности, касающейся стороны BC и продолжений сторон AB и AC .

Решение.

Центр окружности является точкой пересечения биссектрис углов CBM и BCL . При этом по свойству касательных $AL = AM$. Следовательно, длины ломаных ACK и ABK равны полупериметру p . По условию $AB = p - 3\sqrt{3}$; $BK = p - (p - 3\sqrt{3}) = 3\sqrt{3}$.



Найдём радиус KO из прямоугольного треугольника BKO . В треугольнике BKO

$$\angle KBO = (180 - 120) : 2 = 30^\circ,$$

катет KO лежит против угла 30° , значит,

$$KO = \frac{1}{2}BO = \frac{1}{2} \frac{KB}{\cos 30^\circ} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot 3\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 3.$$

Ответ: 3.

24. Окружность, вписанная в треугольник ABC , касается его сторон в точках M , K и P . Найдите углы треугольника ABC , если углы треугольника MKP равны 38° , 78° и 64° .

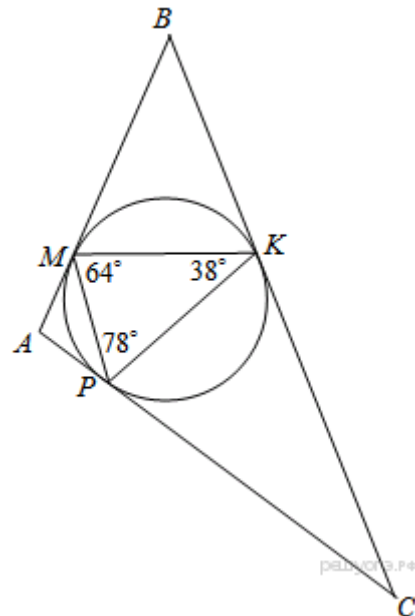
Решение.

Введём обозначения как показано на рисунке. Отрезки касательных, проведённые из одной точки равны, поэтому $MB = BK$, $AM = AP$, $CP = CK$. Следовательно, треугольники MBK , AMP , KPC — равнобедренные, поэтому в каждом треугольнике углы при основании равны. Угол MPK — вписанный, поэтому он равен половине дуги, на которую опирается. Угол BMK образован хордой и касательной, следовательно, он равен половине величины дуги, которую заключает. Значит, $\angle MPK = \angle BMK = \angle BKM = 78^\circ$. Сумма углов треугольника равна 180° . Найдём угол ABC :

$$\angle ABC = 180^\circ - \angle BKM - \angle BMK = 180^\circ - 78^\circ - 78^\circ = 24^\circ.$$

Аналогично, из треугольников AMP и KPC получаем, $\angle BAC = 104^\circ$, $\angle ACB = 52^\circ$.

Ответ: 24° ; 104° ; 52° .



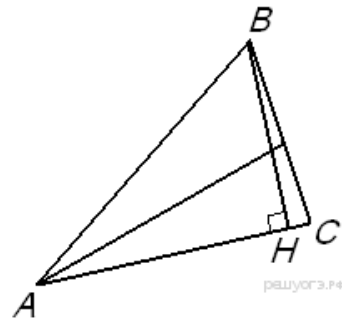
25. В треугольнике ABC биссектриса угла A делит высоту, проведённую из вершины B , в отношении $13 : 12$, считая от точки B . Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC , если $BC = 10$.

Решение.

Обозначим BH высоту, проведённую из вершины B . Биссектриса, проведённая из угла A , делит высоту в отношении, равному отношению AB и AH . Значит $\cos \angle BAC = \frac{AH}{AB} = \frac{12}{13}$, поэтому $\sin \angle BAC = \frac{5}{13}$. По теореме синусов радиус описанной около треугольника ABC окружности

$$R = \frac{BC}{2 \sin \angle BAC} = \frac{10}{2 \cdot \frac{5}{13}} = \frac{10}{2 \cdot 5} \cdot 13 = 13.$$

Ответ: 13.



26. В треугольнике ABC известны длины сторон $AB = 84$, $AC = 98$, точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC . Прямая BD , перпендикулярная прямой AO , пересекает сторону AC в точке D . Найдите CD .

Решение.

Проведём построения как показано на рисунке. Угол ABE — вписанный и опирается на диаметр, значит, угол ABE — прямой. Рассмотрим треугольники AEB и ABF , они прямоугольные, угол BAE — общий, следовательно, эти треугольники подобны. Откуда:

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AB}{AF} \Leftrightarrow AB^2 = AE \cdot AF.$$

Угол ECA — вписанный и опирается на диаметр, следовательно, он прямой. Рассмотрим треугольники AEC и AFD , они прямоугольные, угол FAD — общий, следовательно, эти треугольники подобны. Откуда

$$\frac{AE}{AD} = \frac{AC}{AF} \Leftrightarrow AD = AE \cdot \frac{AF}{AC}.$$

Подставляя выше найденное равенство:

$$AD = \frac{AB^2}{AC} = \frac{84^2}{98} = \frac{84 \cdot 84}{2 \cdot 7 \cdot 7} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7}{2 \cdot 7 \cdot 7} = 72,$$

$$CD = AC - AD = 98 - 72 = 26.$$

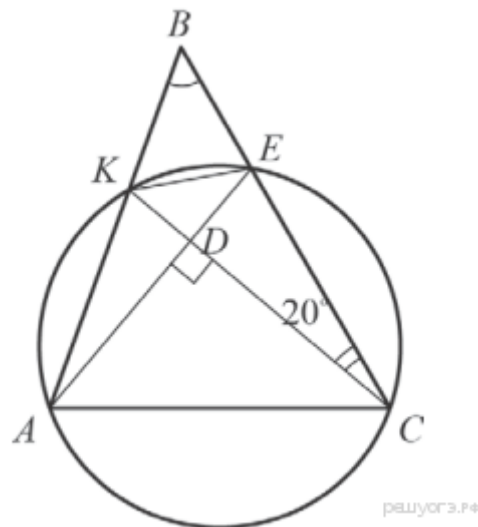
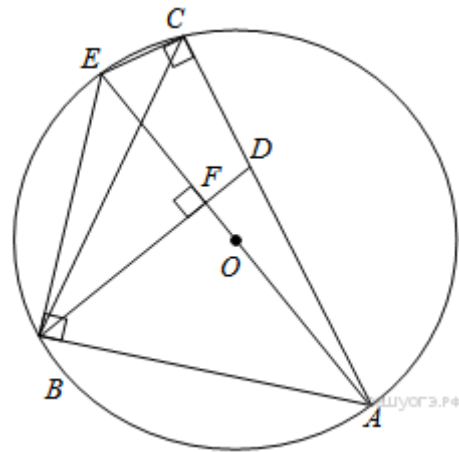
Ответ: 26.

27. Окружность проходит через вершины A и C треугольника ABC и пересекает его стороны AB и BC в точках K и E соответственно. Отрезки AE и CK перпендикулярны. Найдите $\angle ABC$, если $\angle KCB = 20^\circ$.

Решение.

Из $\triangle CDE$ имеет $\angle DEC = 90^\circ - 20^\circ = 70^\circ$, тогда $\angle BEA = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$. Далее $\angle BAE = \angle BCK$, так как они опираются на одну дугу окружности: следовательно, $\angle BKC = \angle BEA$. В четырёхугольнике $BKDE$ имеем $\angle KBE = 360^\circ - 90^\circ - 2 \cdot 110^\circ = 50^\circ$.

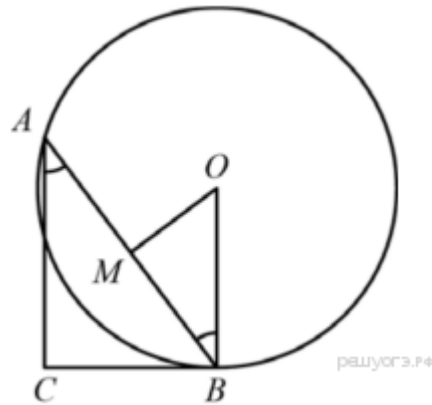
Ответ: 50° .



28. В прямоугольном треугольнике ABC катет AC равен 8, катет BC равен 15. Найдите радиус окружности, которая проходит через концы гипотенузы треугольника и касается прямой BC .

Решение.

По условию окружность проходит через точку B и это единственная общая точка окружности и прямой BC . Следовательно, радиус OB окружности перпендикулярен прямой BC . Поэтому прямые AC и OB параллельны. Центр O окружности равноудален от точек A и B , следовательно, он лежит на серединном перпендикуляре к AB . Обозначим середину AB буквой M .



$\angle MBO = \angle BAC$ — это накрест лежащие углы при параллельных прямых и секущей AB .

Следовательно, прямоугольные треугольники ACB и BMO подобны.

По теореме Пифагора найдем, что $AB = 17$. Коэффициент подобия равен

$$\frac{BM}{AC} = \frac{AB}{2AC} = \frac{17}{16}.$$

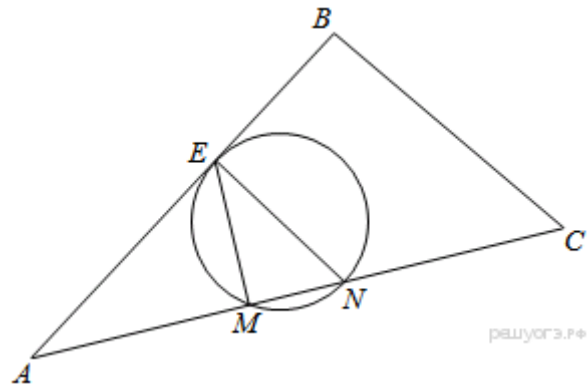
Тогда $OB = \frac{17}{16}AB = \frac{289}{16}$.

Ответ: $OB = \frac{289}{16}$.

29. Точки M и N лежат на стороне AC треугольника ABC на расстояниях соответственно 9 и 11 от вершины A . Найдите радиус окружности, проходящей через точки M и N и касающейся луча AB , если $\cos \angle BAC = \frac{\sqrt{11}}{6}$.

Решение.

Введём обозначения как показано на рисунке. По теореме о касательной и секущей:



$$AM \cdot AN = AE^2 \Leftrightarrow AE = \sqrt{AM \cdot AN} \Leftrightarrow AE = \sqrt{9 \cdot 11} \Leftrightarrow AE = 3\sqrt{11}.$$

Рассмотрим треугольник AEM , по теореме косинусов найдём сторону EM :

$$\begin{aligned} EM &= \sqrt{AE^2 + AM^2 - 2AE \cdot AM \cos \angle BAC} = \\ &= \sqrt{99 + 81 - 2 \cdot 3\sqrt{11} \cdot 9 \cdot \frac{\sqrt{11}}{6}} = 9. \end{aligned}$$

Аналогично из треугольника AEN найдём сторону EN :

$$EN = \sqrt{AE^2 + AN^2 - 2AE \cdot AN \cos \angle BAC} = \sqrt{99 + 121 - 2 \cdot 3\sqrt{11} \cdot 11 \cdot \frac{\sqrt{11}}{6}} = 3\sqrt{11}.$$

В треугольнике AEN стороны AE и EN равны, следовательно, треугольник AEN — равнобедренный, откуда $\angle EAN = \angle ENA$. Из основного тригонометрического тождества найдём $\sin \angle ENA$:

$$\sin \angle ENA = \sqrt{1 - \frac{11}{36}} = \frac{5}{6}.$$

Найдём искомый радиус окружности по теореме синусов:

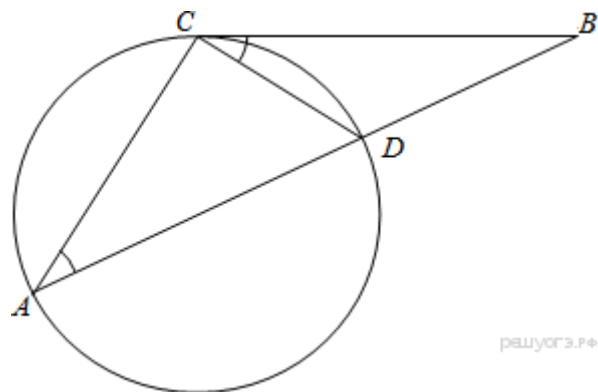
$$R = \frac{EM}{2 \sin \angle ENA} = \frac{9}{2 \cdot \frac{5}{6}} = 5,4.$$

Ответ: 5,4.

30. На стороне AB треугольника ABC взята точка D так, что окружность, проходящая через точки A , C и D , касается прямой BC . Найдите AD , если $AC = 12$, $BC = 18$ и $CD = 8$.

Решение.

Проведём построения и введём обозначения как показано на рисунке. Угол, образованный касательной и хордой равен половине дуги, которую он заключает, поэтому угол BCD равен половине дуги CD . Вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается, поэтому угол CAD равен половине дуги CD . Следовательно, углы BCD и CAD равны. Рассмотрим треугольники ABC и CDB , углы BCD и CAD равны, угол B — общий, значит, треугольники подобны. Откуда $\frac{AC}{CD} = \frac{BC}{BD} = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{2}$.



Значит, $BD = \frac{2}{3}BC = 12$ и $AB = \frac{3}{2}BC = 27$. Таким образом $AD = AB - BD = 15$.

Ответ: 15.

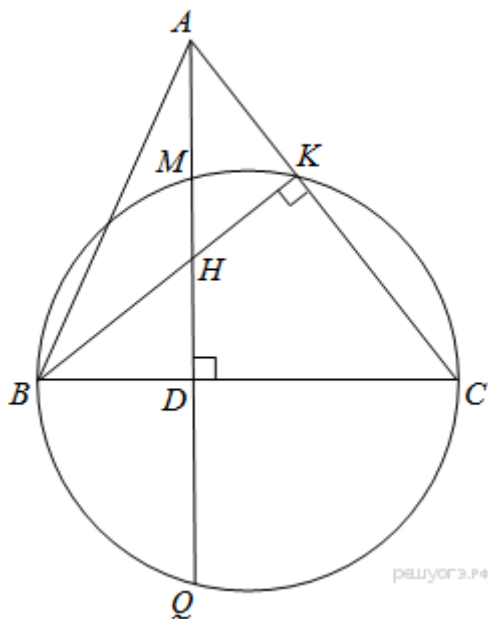
31. На стороне BC остроугольного треугольника ABC ($AB \neq AC$) как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M , $AD = 27$, $MD = 18$, H — точка пересечения высот треугольника ABC . Найдите AH .

Решение.

Проведём построения и введём обозначения как указано на рисунке. Угол BKC — вписанный, опирающийся на диаметр, поэтому он равен 90° . Значит, точка пересечения прямых BK и AD — точка пересечения высот H . Продолжим высоту AD до пересечения с окружностью в точке Q . Получаем, что $MD = QD = 18$. По теореме о секущих получаем, что $AM \cdot AQ = AK \cdot AC = (27 - 18) \cdot (27 + 18) = 405$. Треугольники AKH и ADC — прямоугольные, угол DAC — общий, следовательно, эти треугольники подобны, откуда:

$$\frac{AK}{AD} = \frac{AH}{AC} \Leftrightarrow AH = \frac{AK \cdot AC}{AD} \Leftrightarrow AH = \frac{405}{27} = 15.$$

Ответ: 15.



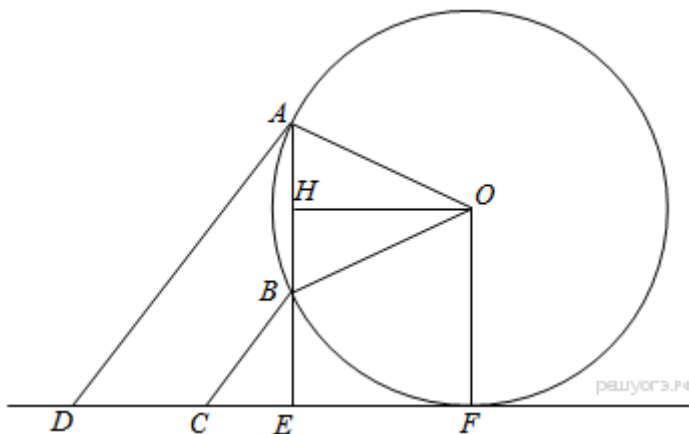
32. В трапеции $ABCD$ основания AD и BC равны соответственно 49 и 21, а сумма углов при основании AD равна 90° . Найдите радиус окружности, проходящей через точки A и B и касающейся прямой CD , если $AB = 20$.

Решение.

Продолжим стороны AB и CD до их пересечения в точке E . Угол AEC равен 90° , поскольку сумма углов EAD и EDA равна 90° . Рассмотрим треугольники AED и BEC , они прямоугольные, углы ECB и EDA равны как соответственные углы при параллельных прямых, следовательно, эти треугольники подобны, откуда $\frac{AE}{BE} = \frac{AB + BE}{BE} = \frac{AD}{BC}$. Найдём BE :

$$\frac{20 + BE}{BE} = \frac{49}{21} \Leftrightarrow 21(BE + 20) = 49BE \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 28BE = 21 \cdot 20 \Leftrightarrow BE = 15.$$



Пусть окружность касается прямой CD в точке F , причём точка F может лежать или на стороне CD или на её продолжении. Отрезок OF перпендикулярен прямой CD , как радиус проведённый в точку касания, OA , OB и OF — радиусы.

Треугольник AOB — равнобедренный, OH — высота, следовательно, OH является медианой и биссектрисой. Четырёхугольник $ONEF$ — прямоугольник, потому что все его углы прямые. Откуда:

$$R = OF = HE = HB + BE = 10 + 15 = 25$$

Ответ: 25.

33. Из вершины прямого угла C треугольника ABC проведена высота CP . Радиус окружности, вписанной в треугольник BCP , равен 45, тангенс угла BAC равен $\frac{3}{4}$. Найдите радиус вписанной окружности треугольника ABC .

Решение.

Угол BAC равен углу BSP так как $\angle BAC = 90^\circ - \angle ABC$ и $\angle BSP = 90^\circ - \angle ABC$. Так как тангенс это отношение противолежащего катета к прилежащему, имеем:

$\operatorname{tg} \angle BSP = \frac{BP}{PS} \Leftrightarrow \frac{3}{4} = \frac{BP}{PS}$. Тогда $BP = 3x$, $PS = 4x$, а гипотенуза $BS = 5x$ по теореме Пифагора. Площадь треугольника равна произведению половины его периметра на радиус вписанной окружности, но площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения катетов, имеем:

$$\frac{1}{2} BP \cdot PS = \frac{P \cdot r_1}{2} \Leftrightarrow 6x^2 = 6x \cdot 45 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 45, \\ x = 0. \end{cases}$$

Таким образом, $BP = 135$, $PS = 180$, а $BS = 225$. Так как $\operatorname{tg} \angle BAC = \frac{3}{4}$, то $AC = 300$, а $AB = 375$ по теореме Пифагора.

В треугольнике ABC площадь равна произведению половины его периметра на радиус вписанной в него окружности, но площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения катетов, имеем:

$$S = \frac{P \cdot r}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 225 \cdot 300 = \frac{1}{2} \cdot 900 \cdot r \Leftrightarrow r = 75.$$

Ответ: $r = 75$.

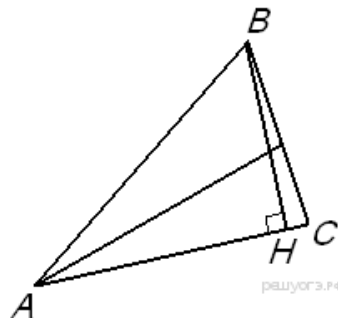
34. В треугольнике ABC биссектриса угла A делит высоту, проведённую из вершины B , в отношении $5 : 4$, считая от точки B . Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC , если $BC = 6$.

Решение.

Обозначим BH высоту, проведённую из вершины B . Биссектриса, проведённая из угла A , делит высоту в отношении, равному отношению AB и AH . Значит $\cos \angle BAC = \frac{AH}{AB} = \frac{4}{5}$, поэтому $\sin \angle BAC = \frac{3}{5}$. По теореме синусов радиус описанной около треугольника ABC окружности

$$R = \frac{BC}{2 \sin \angle BAC} = \frac{6}{2 \cdot \frac{3}{5}} \cdot 5 = 5.$$

Ответ: 5.



35. На стороне BC остроугольного треугольника ABC ($AB \neq AC$) как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M , $AD = 81$, $MD = 9$, H — точка пересечения высот треугольника ABC . Найдите AH .

Решение.

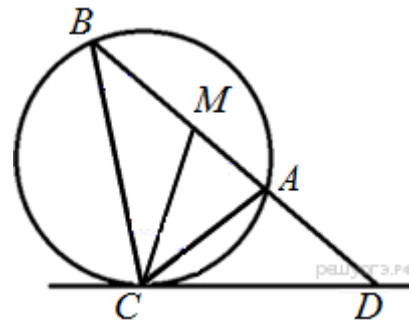
Проведём построения и введём обозначения как указано на рисунке. Угол BKC — вписанный, опирающийся на диаметр, поэтому он равен 90° . Значит, точка пересечения прямых BK и AD — точка пересечения высот H . Продолжим высоту AD до пересечения с окружностью в точке Q . Получаем, что $MD = QD = 9$. По теореме о секущих получаем, что $AM \cdot AQ = AK \cdot AC = (81 - 9) \cdot (81 + 9) = 6480$. Треугольники AHK и ADC — прямоугольные, угол DAC — общий, следовательно, эти треугольники подобны, откуда:

$$\frac{AK}{AD} = \frac{AH}{AC} \Leftrightarrow AH = \frac{AK \cdot AC}{AD} \Leftrightarrow AH = \frac{6480}{81} = 80.$$

Ответ: 80.

Решение.

Угол ACD равен половине дуги на которую он опирается, поскольку это угол, образованный касательной к окружности и секущей, проведённой через точку касания. Угол ABC — вписанный, поэтому он также равен половине дуги, на которую опирается. Углы ABC и ACD опираются на одну и ту же дугу, следовательно, они равны. Рассмотрим треугольники ACD и BCD , угол BDC — общий, углы ABC и ACD равны, следовательно, треугольники подобны, откуда $\frac{CD}{BD} = \frac{AC}{BC} = \frac{AD}{CD}$. Биссектриса угла делит сторону треугольника на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам: $\frac{AC}{BC} = \frac{AM}{BM} = \frac{7}{17}$. Получаем:



$$AD = \frac{7}{17}CD, \quad BD = \frac{17}{7}CD, \quad BD = AD + AB = AD + 7 + 17 = AD + 24.$$

Найдём CD :

$$\begin{aligned} \frac{17}{7}CD &= \frac{7}{17}CD + 24 \Leftrightarrow CD \left(\frac{17}{7} - \frac{7}{17} \right) = 24 \Leftrightarrow CD \frac{17 \cdot 17 - 7 \cdot 7}{17 \cdot 7} = 24 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow CD = \frac{24 \cdot 17 \cdot 7}{(17-7)(17+7)} \Leftrightarrow CD = 11,9. \end{aligned}$$

Ответ: 11,9.

38. Окружность, вписанная в треугольник ABC , касается его сторон в точках M , K и P . Найдите углы треугольника ABC , если углы треугольника MPK равны 62° , 57° и 61° .

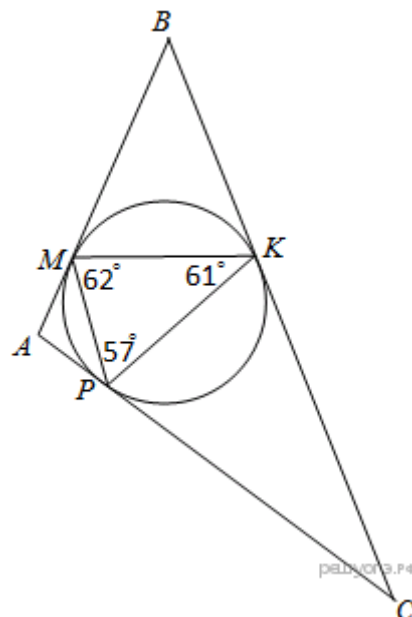
Решение.

Введём обозначения как показано на рисунке. Отрезки касательных, проведённые из одной точки равны, поэтому $MB = BK$, $AM = AP$, $CP = CK$. Следовательно, треугольники MBK , AMP , KPC — равнобедренные, поэтому в каждом треугольнике углы при основании равны. Угол MPK — вписанный, поэтому он равен половине дуги, на которую опирается. Угол BMK образован хордой и касательной, следовательно, он равен половине величины дуги, которую заключает. Значит, $\angle MPK = \angle BMK = \angle BKM = 57^\circ$. Сумма углов треугольника равна 180° . Найдём угол ABC :

$$\angle ABC = 180^\circ - \angle BKM - \angle BMK = 180^\circ - 57^\circ - 57^\circ = 66^\circ.$$

Аналогично, из треугольников AMP и KPC получаем, $\angle BAC = 56^\circ$, $\angle ACB = 58^\circ$.

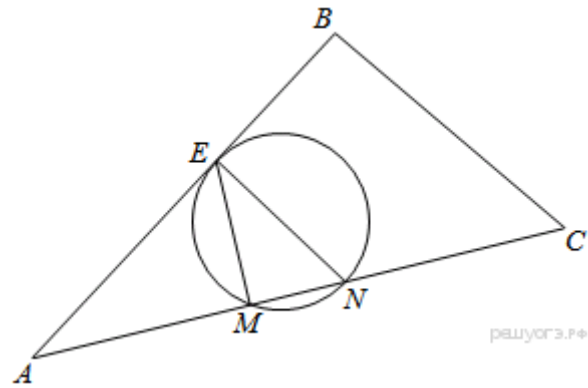
Ответ: 66° ; 56° ; 58° .



39. Точки M и N лежат на стороне AC треугольника ABC на расстояниях соответственно 12 и 45 от вершины A . Найдите радиус окружности, проходящей через точки M и N и касающейся луча AB , если $\cos \angle BAC = \frac{\sqrt{15}}{4}$.

Решение.

Введём обозначения как показано на рисунке. По теореме о касательной и секущей:



$$AM \cdot AN = AE^2 \Leftrightarrow AE = \sqrt{AM \cdot AN} \Leftrightarrow AE = \sqrt{12 \cdot 45} \Leftrightarrow AE = 6\sqrt{15}.$$

Рассмотрим треугольник AEM , по теореме косинусов найдём сторону EM :

$$\begin{aligned} EM &= \sqrt{AE^2 + AM^2 - 2AE \cdot AM \cos \angle BAC} = \\ &= \sqrt{540 + 144 - 2 \cdot 6\sqrt{15} \cdot 12 \frac{\sqrt{15}}{4}} = 12. \end{aligned}$$

Аналогично из треугольника AEN найдём сторону EN :

$$EN = \sqrt{AE^2 + AN^2 - 2AE \cdot AN \cos \angle BAC} = \sqrt{540 + 2025 - 2 \cdot 6\sqrt{15} \cdot 45 \cdot \frac{\sqrt{15}}{4}} = 6\sqrt{15}.$$

В треугольнике AEN стороны AE и EN равны, следовательно, треугольник AEN — равнобедренный, откуда $\angle EAN = \angle ENA$. Из основного тригонометрического тождества найдём $\sin \angle ENA$:

$$\sin \angle ENA = \sqrt{1 - \frac{15}{16}} = \frac{1}{4}.$$

Найдём искомый радиус окружности по теореме синусов:

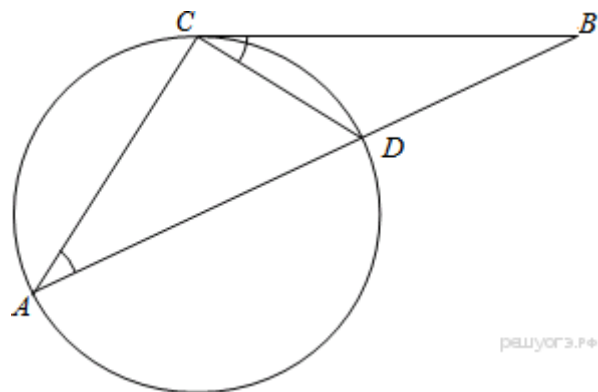
$$R = \frac{EM}{2 \sin \angle ENA} = \frac{12}{2 \cdot \frac{1}{4}} = 24.$$

Ответ: 24.

40. На стороне AB треугольника ABC взята точка D так, что окружность, проходящая через точки A , C и D , касается прямой BC . Найдите AD , если $AC = 48$, $BC = 28$ и $CD = 24$.

Решение.

Проведём построения и введём обозначения как показано на рисунке. Угол, образованный касательной и хордой равен половине дуги, которую он заключает, поэтому угол BCD равен половине дуги CD . Вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается, поэтому угол CAD равен половине дуги CD . Следовательно, углы BCD и CAD равны. Рассмотрим треугольники ABC и CDB , углы BCD и CAD равны, угол B — общий, значит, треугольники подобны. Откуда $\frac{AC}{CD} = \frac{BC}{BD} = \frac{AB}{BC} = \frac{2}{1}$.



Значит, $BD = \frac{1}{2}BC = 14$ и $AB = \frac{2}{1}BC = 56$. Таким образом $AD = AB - BD = 42$.

Ответ: 42.

41. В трапеции $ABCD$ основания AD и BC равны соответственно 34 и 14, а сумма углов при основании AD равна 90° . Найдите радиус окружности, проходящей через точки A и B и касающейся прямой CD , если $AB = 12$.

Решение.

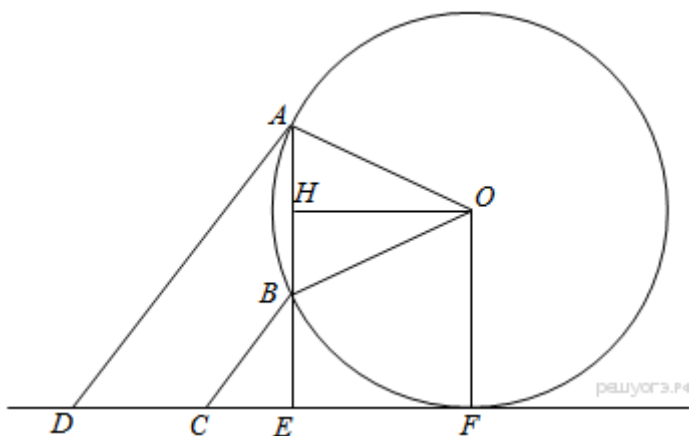
Продолжим стороны AB и CD до их пересечения в точке E . Угол AEC равен 90° , поскольку сумма углов EAD и EDA равна 90° . Рассмотрим треугольники AED и BEC , они прямоугольные, углы ECB и EDA равны как соответственные углы при параллельных прямых, следовательно, эти треугольники подобны, откуда

$$\frac{AE}{BE} = \frac{AB + BE}{BE} = \frac{AD}{BC}.$$

Найдём BE :

$$\frac{12 + BE}{BE} = \frac{34}{14} \Leftrightarrow 14(BE + 12) = 34BE \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 20BE = 14 \cdot 12 \Leftrightarrow BE = 8,4.$$



Пусть окружность касается прямой CD в точке F , причём точка F может лежать или на стороне CD или на её продолжении. Отрезок OF перпендикулярен прямой CD , как радиус проведённый в точку касания, OA , OB и OF — радиусы.

Треугольник AOB — равнобедренный, OH — высота, следовательно, OH является медианой и биссектрисой. Четырёхугольник $OHEF$ — прямоугольник, потому что все его углы прямые. Откуда:

$$R = OF = HE = HB + BE = 6 + 8,4 = 14,4$$

Ответ: 14,4.

42. Четырёхугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 2$ и $CD = 5$ вписан в окружность. Диагонали AC и BD пересекаются в точке K , причём $\angle AKB = 60^\circ$. Найдите радиус окружности, описанной около этого четырёхугольника.

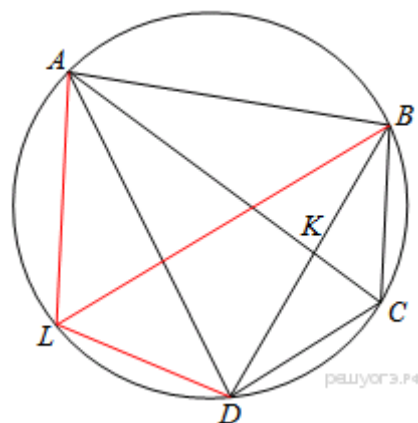
Решение.

Проведём через точку D прямую, параллельную диагонали AC . Дуги AL и CD равны, следовательно, равны и стягивающие их хорды: $AL = CD = 5$.

Вертикальные углы AKB и CKD равны. Углы CKD и LDK равны как накрест лежащие: $\angle CKD = \angle LDK = 60^\circ$.

Четырёхугольник $ABDL$ вписан в окружность, следовательно, суммы противоположных углов равны 180° , откуда $\angle LAB = 180^\circ - \angle LDK = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

Рассмотрим треугольник ABL . По теореме косинусов:



$$BL = \sqrt{AL^2 + AB^2 - 2AL \cdot AB \cos 120^\circ} = \sqrt{25 + 4 - 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot \cos 120^\circ} = \sqrt{39}.$$

Найдём радиус описанной вокруг треугольника ABL окружности по теореме синусов:

$$R = \frac{BL}{2 \sin \angle BAL} = \frac{\sqrt{39}}{2 \sin 120^\circ} = \frac{\sqrt{39}}{2 \sin 60^\circ} = \frac{\sqrt{39}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{39}{3}} = \sqrt{13}.$$

Ответ: $\sqrt{13}$.

43. В треугольнике ABC известны длины сторон $AB = 8$, $AC = 64$, точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC . Прямая BD , перпендикулярная прямой AO , пересекает сторону AC в точке D . Найдите CD .

Решение.

Проведём построения как показано на рисунке. Угол ABE — вписанный и опирается на диаметр, значит, угол ABE — прямой. Рассмотрим треугольники AEB и ABF , они прямоугольные, угол BAE — общий, следовательно, эти треугольники подобны. Откуда:

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AB}{AF} \Leftrightarrow AB^2 = AE \cdot AF.$$

Угол ECA — вписанный и опирается на диаметр, следовательно, он прямой. Рассмотрим треугольники AEC и AFD , они прямоугольные, угол FAD — общий, следовательно, эти треугольники подобны. Откуда

$$\frac{AE}{AD} = \frac{AC}{AF} \Leftrightarrow AD = AE \cdot \frac{AF}{AC}.$$

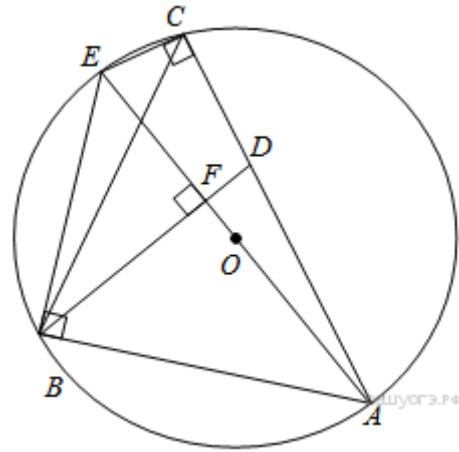
Подставляя выше найденное равенство:

$$AD = \frac{AB^2}{AC} = \frac{8^2}{64} = 1,$$

$$CD = AC - AD = 64 - 1 = 63.$$

Ответ: 63.

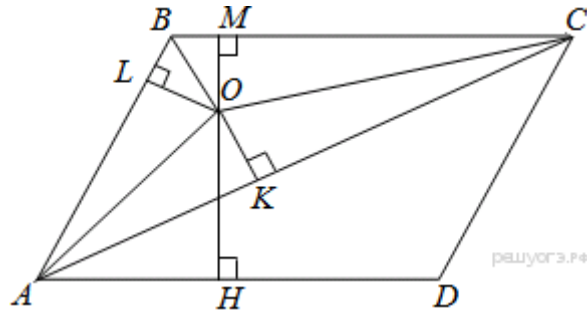
44. В параллелограмме $ABCD$ проведена диагональ AC . Точка O является центром окружности, вписанной в треугольник ABC . Расстояния от точки O до точки A и прямых AD и AC соответственно равны 25, 8 и 7. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$.



Решение.

Проведём построения и введём обозначения как показано на рисунке. Пусть O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC . Центр вписанной окружности — это точка пересечения биссектрис, поэтому AO , BO , CO — биссектрисы. Из прямоугольного треугольника AOK по теореме Пифагора найдём AK :

$$AK = \sqrt{AO^2 - OK^2} = \sqrt{625 - 49} = 24.$$



Отрезки OM , OL и OK равны как радиусы вписанной в треугольник ABC окружности, то есть $OM = OL = OK = 7$. Рассмотрим треугольники ALO и AOK , они прямоугольные, углы LAO и OAK равны, AO — общая, следовательно, треугольники равны, откуда $AL = AK = 24$. Аналогично из равенства треугольников COM и COK получаем $MC = CK$, а из равенства треугольников BOL и BOM — $BL = BM$. Площадь треугольника ABC можно найти как произведение радиуса вписанной окружности на полупериметр:

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= \frac{AB + BC + AC}{2} \cdot OK = \frac{AL + LB + BM + MC + CK + AK}{2} \cdot OK = \\ &= \frac{(48 + 2BM + 2MC)}{2} \cdot 7 = 7(24 + BM + MC). \end{aligned}$$

Площадь параллелограмма равна произведению высоты на основание:

$$S_{ABCD} = MH \cdot BC = (MO + OH) \cdot (BM + MC) = 15(BM + MC).$$

Рассмотрим треугольники ABC и ACD , AB равно CD , AD равно BC , углы ABC и ADC равны, следовательно, треугольники ABC и ACD равны. Поэтому площадь треугольника ABC равна половине площади параллелограмма:

$$7(24 + BM + MC) = \frac{1}{2} \cdot 15(BM + MC) \Leftrightarrow BM + MC = 336 \Leftrightarrow BC = 336.$$

Площадь параллелограмма равна: $S_{ABCD} = BC \cdot MH = 336 \cdot 15 = 5040$.

Ответ: 5040.