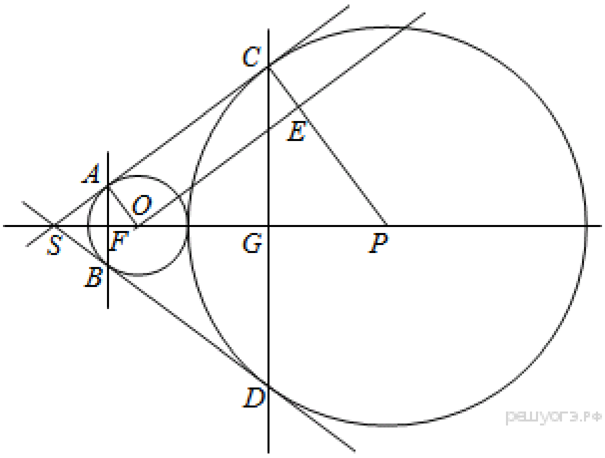
Окружности

1. Окружности радиусов 25 и 100 касаются внешним образом. Точки *A* и *B* лежат на первой окружности, точки *C* и *D* — на второй. При этом *AC* и *BD* — общие касательные окружностей. Найдите расстояние между прямыми *AB* и *CD*.

Решение.



Введём обозначения как показано на рисунке. Проведём прямую OE, параллельную AC. Прямая AC — касательная к обеим окружностям поэтому радиусы OA и CP перпендикулярны прямой AC, откуда заключаем, что $AO \parallel CP$, откуда $EP \perp OE$. Рассмотрим четырёхугольник $ACEO$: $AO \parallel CP$, $AC \parallel OE$, следовательно, $ACEO$ — параллелограмм, откуда $AC = OE$, $AO = CE = 25$. Значит, $EP = CP - CE = 100 - 25 = 75$. Также заметим, что $OP = 25 + 100 = 125$. Углы SOA и SPC равны, как соответственные углы при параллельных прямых. Из треугольника OEP:

$$\cos \angle SPC = \frac{EP}{OP} = \frac{75}{125} = \frac{3}{5}.$$

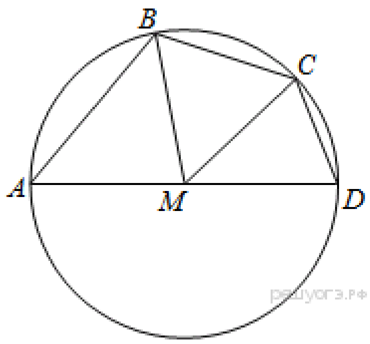
Из треугольника AFO: $FO = AO \cos \angle SOA = 25 \cdot \frac{3}{5} = 15$. Из треугольника CPG: $GP = CP \cos \angle SPC = 100 \cdot \frac{3}{5} = 60$. Таким образом, получаем, что искомое расстояние:

$$FG = FP - GP = FO + OP - GP = 15 + 125 - 60 = 80.$$

Ответ: 80.

2. Середина *M* стороны *AD* выпуклого четырёхугольника равноудалена от всех его вершин. Найдите *AD*, если *BC* = 10, а углы *B* и C четырёхугольника равны соответственно 112° и 113°.

Решение.



Поскольку существует точка, равноудалённая от всех вершин четырёхугольника, четырёхугольник можно вписать в окружность. Четырёхугольник вписан в окружность, следовательно, суммы противоположных углов равны 180°:

$$\angle BAC + \angle BCD = 180^\circ \Leftrightarrow \angle BAD = 67^\circ.$$

Отрезки AM, BM и CM равны как радиусы окружности, поэтому треугольники ABM и BMC — равнобедренные, откуда $\angle BAD = \angle ABM = 67^\circ$ и $\angle MCB = \angle MBC = \angle ABC - \angle ABM = 45^\circ$. Рассмотрим треугольник BMC, сумма углов в треугольнике равна 180°, откуда $\angle BMC = 180^\circ - \angle MBC - \angle BCM = 90^\circ$. По теореме синусов найдём сторону BM из треугольника BMC:

$$\frac{BC}{\sin BMC} = \frac{BM}{\sin BCM} \Leftrightarrow BM = 10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow BM = 5\sqrt{2}.$$

Сторона AD — диаметр описанной окружности, поэтому $AD = 2BM = 10\sqrt{2}.$

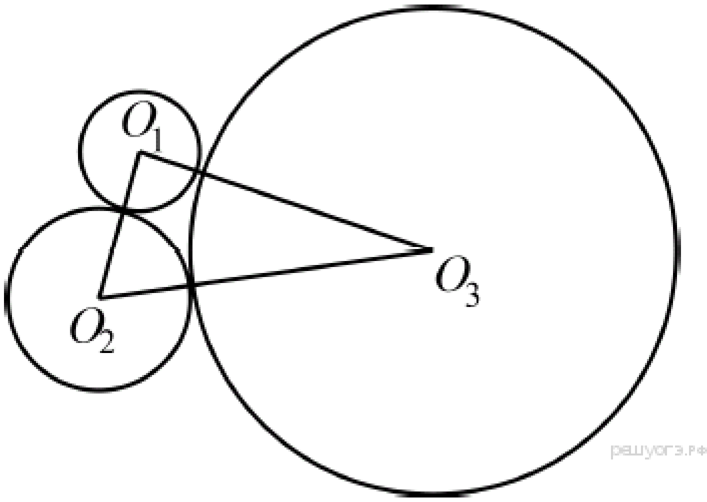
Ответ: $10\sqrt{2}.$

3. Три окружности с центрами O_1, O_2 и O_3 и радиусами 2,5, 0,5 и 4,5 соответственно попарно касаются внешним образом. Найдите угол $O_1O_2O_3$.

Решение.

Из условия касания окружностей находим стороны треугольника $O_1O_2O_3$

$$O_1O_2 = 3, O_2O_3 = 5, O_1O_3 = 7$$



По теореме косинусов

$$O_1O_3^2 = O_1O_2^2 + O_2O_3^2 - 2O_1O_2 \cdot O_2O_3 \cdot \cos\angle O_1O_2O_3$$

$$49 = 9 + 25 - 30\cos\angle O_1O_2O_3$$

Откуда $\cos\angle O_1O_2O_3 = -\dfrac{1}{2}; \angle O_1O_2O_3 = 120^\circ$

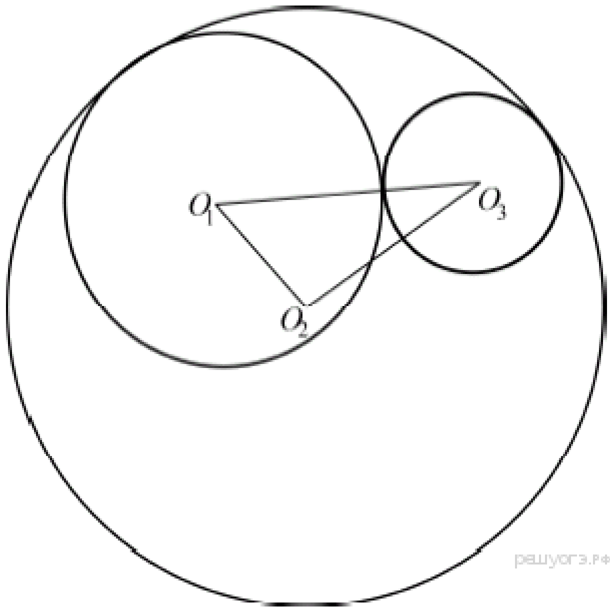
Ответ: 120°.

4. Две окружности с центрами O_1 и O_3 и радиусами 4,5 и 2,5 касаются друг с другом внешним образом и внутренним образом касаются окружности с центром O_2 радиусом 7,5. Найдите угол $O_1O_2O_3$.

Решение.

Из условия касания окружностей находим стороны треугольника $O_1O_2O_3$

$$O_1O_2 = 3, O_2O_3 = 5, O_1O_3 = 7$$



По теореме косинусов

$$O_1O_3^2 = O_1O_2^2 + O_2O_3^2 - 2O_1O_2 \cdot O_2O_3 \cdot \cos\angle O_1O_2O_3$$

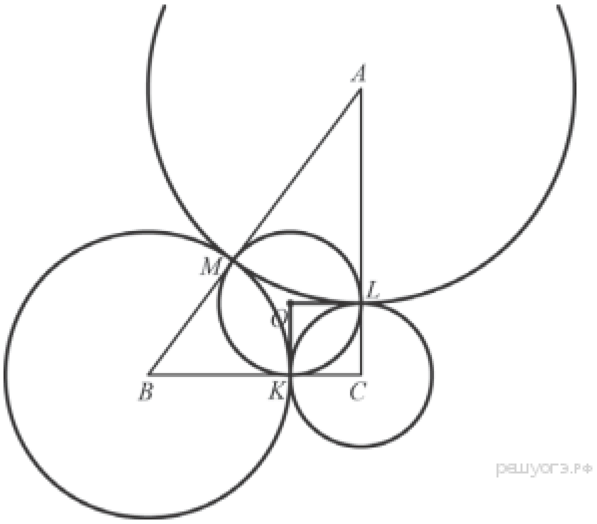
$$49 = 9 + 25 - 30\cos\angle O_1O_2O_3$$

Откуда $\cos\angle O_1O_2O_3 = -\dfrac{1}{2}; \angle O_1O_2O_3 = 120^\circ$

Ответ: 120°.

5. Три окружности, радиусы которых равны 2, 3 и 10, попарно касаются внешним образом. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник, вершинами которого являются центры этих трёх окружностей.

Решение.

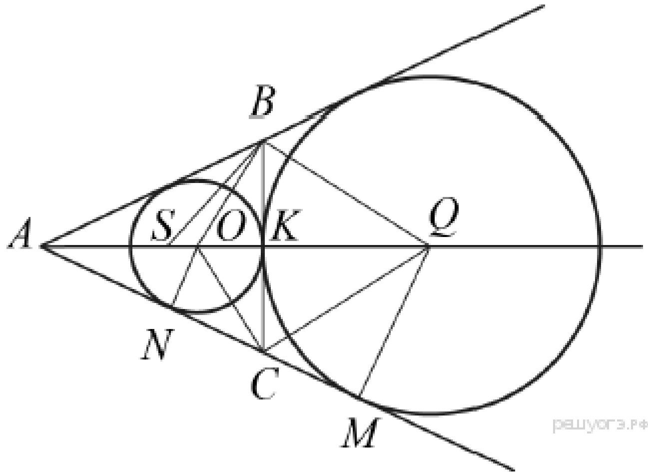


Стороны треугольника, вершинами которого является центры этих трёх окружностей, равны 5, 12 и 13. Поскольку $5^2+12^2=13^2$, этот треугольник прямоугольный. Площадь этого треугольника равна 30. В то же время, она равна произведению радиуса вписанной окружности на полупериметр. Значит, искомый радиус равен $30:\dfrac{5+12+13}{2}=2.$

Ответ: 2.

6. Две касающиеся внешним образом в точке K окружности, радиусы которых равны 16 и 48, вписаны в угол с вершиной A. Общая касательная к этим окружностям, проходящая через точку K, пересекает стороны угла в точках B и C. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

Решение.



Пусть Q — центр большей окружности, а O — центр меньшей, QM и ON — радиусы, проведённые в точки касания окружностей с прямой AC , S — центр окружности, описанной около треугольника ABC , r — радиус окружности, описанной около треугольника ABC .

Поскольку BC и AB — общие касательные к окружностям, BO и BQ — биссектрисы углов ABK и смежного с ним. Значит, угол OBQ прямой, следовательно, из треугольника OBQ находим, что $BK=\sqrt{OK\cdot QK}=16\sqrt{3}.$

Пусть $AN = x$. Прямоугольные треугольники ANO и AMQ подобны с коэффициентом 3, значит, $AM = 3x$, $MN = 2x$.

Отрезки MC , CK и CN равны как отрезки касательных, проведённых из одной точки, значит, $BK=CK=16\sqrt{3}, 2x=MN=2CK=32\sqrt{3}$, откуда $AB=2x=32\sqrt{3}.$

В прямоугольном треугольнике ABK находим неизвестный катет:

$$AK=\sqrt{AB^2-BK^2}=48$$

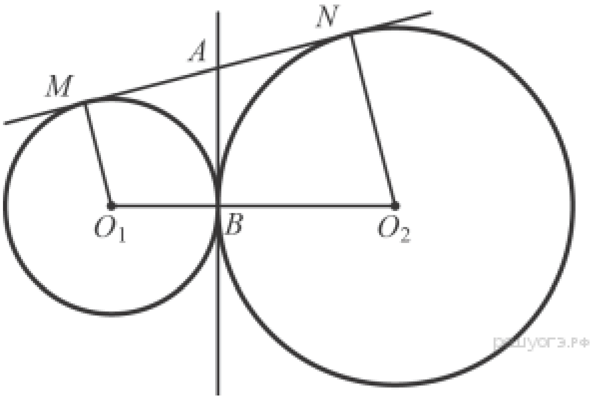
В прямоугольном треугольнике SBK по теореме Пифагора имеем

$$r^2=(AK-r)^2+BK^2\,;r=\frac{AB^2}{2AK}=\frac{32^2\cdot 3}{2\cdot 48}=32.$$

Ответ: 32.

7. Окружность радиуса 4 касается внешним образом второй окружности в точке B. Общая касательная к этим окружностям, проходящая через точку B, пересекается с некоторой другой их общей касательной в точке A. Найдите радиус второй окружности, если $AB=6$.

Решение.

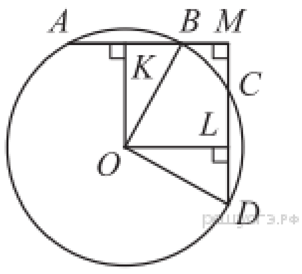


Обозначим центры первой и второй окружностей за O_1 и O_2, а точки касания, с общей касательной, не проходящей через точку B, за M и N. Прямоугольные треугольники AO_1M и AO_1B равны по катету и гипотенузе. Аналогично, равны треугольники AO_2N и AO_2B. Значит, прямые O_1A и O_2A являются биссектрисами углов MO_1B и NO_2B соответственно. Прямые MO_1 и NO_2 параллельны, поэтому сумма углов MO_1B и NO_2B равна 180°, а сумма углов AO_1B и AO_2B равна 90°, то есть треугольник O_1O_2A — прямоугольный. Поскольку AB — высота, проведённая к гипотенузе, треугольники AO_1B и AO_2B подобны. Значит, $O_2B = \dfrac{AB^2}{O_1B} = 9$.

Ответ: 9.

8. В окружности с центром в точке O проведены две хорды AB и CD. Прямые AB и CD перпендикулярны и пересекаются в точке M, лежащей вне окружности. При этом $AM = 36,\ BM = 6,\ CD = 4\sqrt{46}$. Найдите OM.

Решение.



Обозначим r радиус окружности, точкой K середину отрезка AB, а точкой L середину отрезка CD. Поскольку треугольники AOB и COD равнобедренные, OK и OL перпендикулярны AB и CD соответственно. Отрезок AB равен $AM - BM = 30$. Четырёхугольник $OKML$ является прямоугольником, поэтому $OL = \dfrac{AB}{2} + BM = 21$.

Из прямоугольного треугольника ODL находим $r = \sqrt{OL^2 + DL^2} = 25$.

Из прямоугольного треугольника OKB находим $OK = \sqrt{r^2 - KB^2} = 20$.

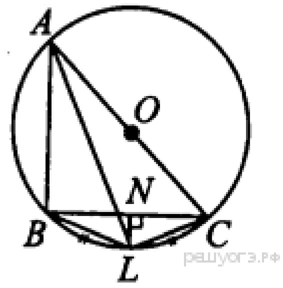
Из прямоугольного треугольника OKM находим $OM = \sqrt{OK^2 + KM^2} = 29$.

Ответ: 29.

9. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом B, проведена биссектриса угла A. Известно, что она пересекает серединный перпендикуляр, проведённый к стороне BC в точке K. Найдите угол BCK, если известно, что угол ACB равен 40°.

Решение.

Так как биссектриса острого угла A прямоугольного треугольника ABC не может быть перпендикулярна BC, то биссектриса угла A и серединный перпендикуляр к BC имеют ровно одну общую точку.



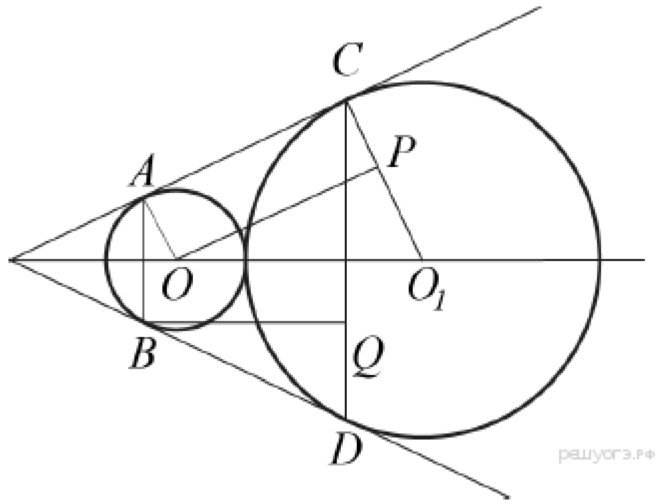
Пусть N — середина BC. Рассмотрим окружность, описанную около ΔABC. Пусть серединный перпендикуляр к BC пересекает меньшую дугу BC в точке L (см. рисунок), тогда точка L является серединой этой дуги, $\smile BL = \smile LC$. Но тогда $\angle BAL = \angle CAL$ как вписанные углы, опирающиеся на равные дуги, а отсюда AL — биссектриса $\angle BAC$. Но это означает, что точка L совпадает с точкой K, то есть с точкой пересечения серединного перпендикуляра к BC и биссектрисой $\angle BAC$. Заметим, что $\angle BCL = \angle CBL$ как вписанные углы, опирающиеся на равные дуги.

Пусть $\angle BCL = x$. Четырехугольник $ACLB$ — вписанный, поэтому $\angle ACL + \angle ABL = 180^\circ$, то есть $40^\circ + x + 90^\circ + x = 180^\circ$, откуда $x = 25^\circ$. Так как точки K и L совпадают, $\angle BCK = \angle BCL = 25^\circ$.

Ответ: 25°.

10. Окружности радиусов 14 и 35 касаются внешним образом. Точки A и B лежат на первой окружности, точки C и D — на второй. При этом AC и BD — общие касательные окружностей. Найдите расстояние между прямыми AB и CD.

Решение.



Линия центров касающихся окружностей проходит через их точку касания, поэтому расстояние между центрами окружностей равно сумме их радиусов, т. е. 49. Опустим перпендикуляр OP из центра меньшей окружности на радиус O_1C второй окружности. Тогда

$$O_1P = O_1C - PC = O_1\mathrm{C} - OA = 35 - 14 = 21.$$

Из прямоугольного треугольника OPO_1 находим, что

$$OP = \sqrt{OO_1^2 - OP_1^2} = 14\sqrt{10}$$

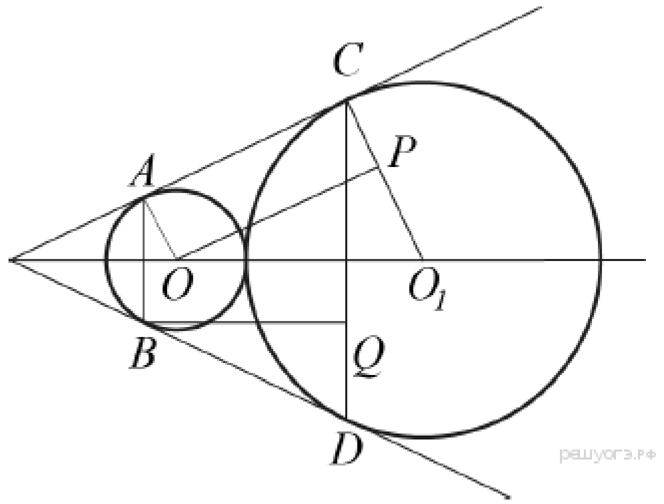
Опустим перпендикуляр BQ из точки B на прямую CD. Прямоугольный треугольник BQD подобен прямоугольному треугольнику OPO_1 по двум углам, поэтому $\dfrac{BQ}{BD} = \dfrac{OP}{OO_1}$. Следовательно.

$$BQ = \frac{OP \cdot BD}{OO_1} = \frac{14\sqrt{10} \cdot 14\sqrt{10}}{49} = 40.$$

Ответ: 40.

11. Окружности радиусов 60 и 90 касаются внешним образом. Точки A и B лежат на первой окружности, точки C и D — на второй. При этом AC и BD — общие касательные окружностей. Найдите расстояние между прямыми AB и CD.

Решение.



Линия центров касающихся окружностей проходит через их точку касания, поэтому расстояние между центрами окружностей равно сумме их радиусов, т. е. 150. Опустим перпендикуляр OP из центра меньшей окружности на радиус O_1C второй окружности. Тогда

$$O_1P = O_1C - PC = O_1\text{C} - OA = 90 - 60 = 30.$$

Из прямоугольного треугольника OPO_1 находим, что

$$OP = \sqrt{OO_1^2 - OP_1^2} = 60\sqrt{6}.$$

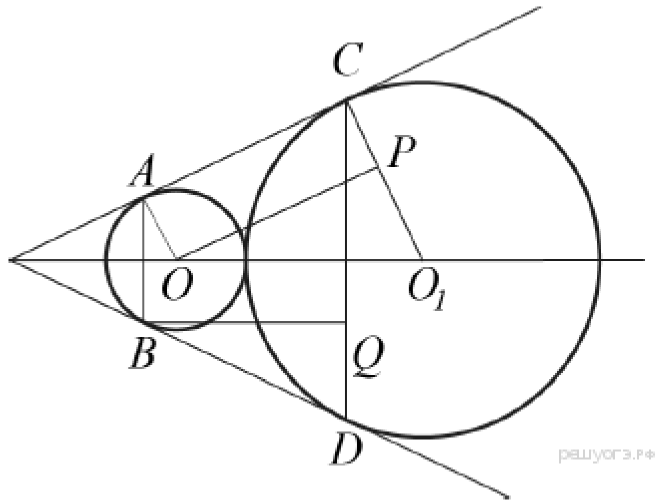
Опустим перпендикуляр BQ из точки B на прямую CD. Прямоугольный треугольник BQD подобен прямоугольному треугольнику OPO_1 по двум углам, поэтому $\frac{BQ}{BD} = \frac{OP}{OO_1}$. Следовательно.

$$BQ = \frac{OP \cdot BD}{OO_1} = \frac{60\sqrt{6} \cdot 60\sqrt{6}}{150} = 144.$$

Ответ: 144.

12. Окружности радиусов 22 и 99 касаются внешним образом. Точки *A* и *B* лежат на первой окружности, точки *C* и *D* — на второй. При этом *AC* и *BD* — общие касательные окружностей. Найдите расстояние между прямыми *AB* и *CD*.

Решение.



Линия центров касающихся окружностей проходит через их точку касания, поэтому расстояние между центрами окружностей равно сумме их радиусов, т. е. 121. Опустим перпендикуляр OP из центра меньшей окружности на радиус O_1C второй окружности. Тогда

$$O_1P = O_1C - PC = O_1\text{C} - OA = 99 - 22 = 77.$$

Из прямоугольного треугольника OPO_1 находим, что

$$OP = \sqrt{OO_1^2 - OP_1^2} = 66\sqrt{2}.$$

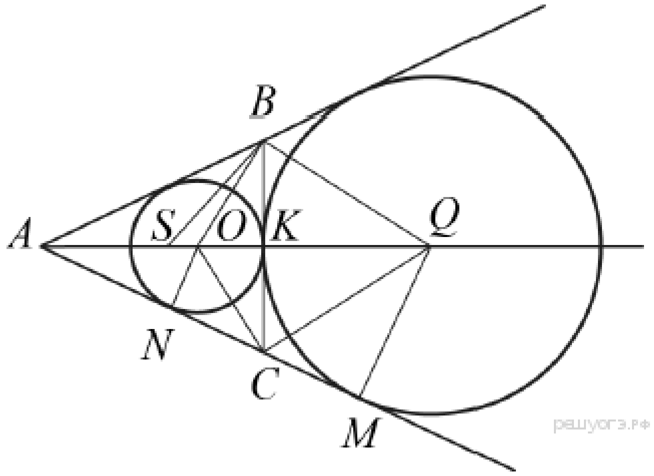
Опустим перпендикуляр BQ из точки B на прямую CD. Прямоугольный треугольник BQD подобен прямоугольному треугольнику OPO_1 по двум углам, поэтому $\dfrac{BQ}{BD} = \dfrac{OP}{OO_1}$. Следовательно.

$$BQ = \frac{OP \cdot BD}{OO_1} = \frac{66\sqrt{2} \cdot 66\sqrt{2}}{121} = 72.$$

Ответ: 72.

13. Две касающиеся внешним образом в точке K окружности, радиусы которых равны 36 и 45, вписаны в угол с вершиной A. Общая касательная к этим окружностям, проходящая через точку K, пересекает стороны угла в точках B и C. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

Решение.



Пусть Q — центр большей окружности, а O — центр меньшей, QM и ON — радиусы, проведённые в точки касания окружностей с прямой AC , S — центр окружности, описанной около треугольника ABC , r — радиус окружности, описанной около треугольника ABC .

Поскольку BC и AB — общие касательные к окружностям, BO и BQ — биссектрисы углов ABK и смежного с ним. Значит, угол OBQ прямой, следовательно, из треугольника OBQ находим, что $BK=\sqrt{OK\cdot QK}=18\sqrt{5}.$

Пусть $AN = x$. Прямоугольные треугольники ANO и AMQ подобны с коэффициентом 1,25, значит, $AM = 1,25x$, $MN = 0,25x$.

Отрезки MC , CK и CN равны как отрезки касательных, проведённых из одной точки, значит, $BK=CK=18\sqrt{5}, 0,25x=MN=2CK=36\sqrt{5}$, откуда $AB=1,125x=162\sqrt{5}.$

В прямоугольном треугольнике ABK находим неизвестный катет:

$$AK=\sqrt{AB^2-BK^2}=360$$

В прямоугольном треугольнике SBK по теореме Пифагора имеем

$$r^2=(AK-r)^2+BK^2\,; r=\frac{AB^2}{2AK}=\frac{162^2\cdot 5}{2\cdot 360}=182,25.$$

Ответ: 182,25.