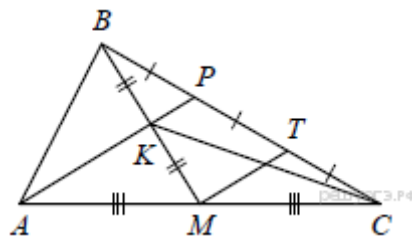


Треугольники

1. Через середину K медианы BM треугольника ABC и вершину A проведена прямая, пересекающая сторону BC в точке P . Найдите отношение площади треугольника ABK к площади четырёхугольника $KPCM$.

Решение.

Проведём отрезок MT , параллельный AP . Тогда MT — средняя линия треугольника APC и $CT = TP$, а KP — средняя линия треугольника BMT и $TP = BP$. Обозначим площадь треугольника BKP через S . Тогда площадь треугольника KPC , имеющего ту же высоту и вдвое больше основание, равна $2S$. Значит площадь треугольника CKB равна $3S$ и равна площади треугольника CMK (треугольники имеют одну высоту, проведённую из вершины C , и равные равные основания), которая в свою очередь равна площади треугольника AMK . Площадь треугольника ABK равна площади треугольника AMK . Итак, $S_{BKP} = S$, $S_{KPC} = 2S$, $S_{CMK} = 3S = S_{AMK} = S_{ABK}$, $S_{KPCM} = 5S$. Значит, $S_{ABK} : S_{KPCM} = 3 : 5 = 0,6$.



Ответ: 0,6.

2. Площадь треугольника ABC равна 80. Биссектриса AD пересекает медиану BK в точке E , при этом $BD:CD=1:3$. Найдите площадь четырёхугольника $EDCK$.

Решение.

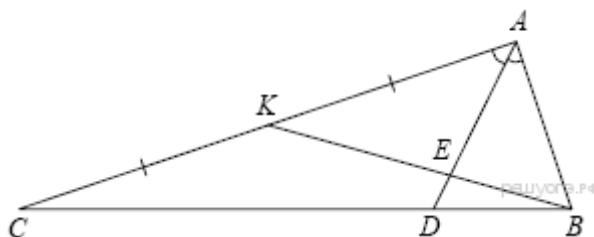
Пусть $AK=KC=3x$, тогда $AB=2x$, так как $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD} = \frac{1}{3}$ по свойству биссектрисы. Значит, $\frac{BE}{KE} = \frac{2}{3}$.

Пусть S - площадь треугольника ABC , тогда

$$S_{ACD} = \frac{CD}{CB} \cdot S = \frac{3}{4}S;$$

$$S_{AKE} = \frac{KE}{BK} \cdot S_{ABK} = \frac{KE}{BK} \cdot \frac{AK}{AC} \cdot S = \frac{3S}{10}.$$

Таким образом, $S_{EDKC} = S_{ACD} - S_{AKE} = \frac{3}{4}S - \frac{3S}{10} = \frac{9}{20}S = 36$.



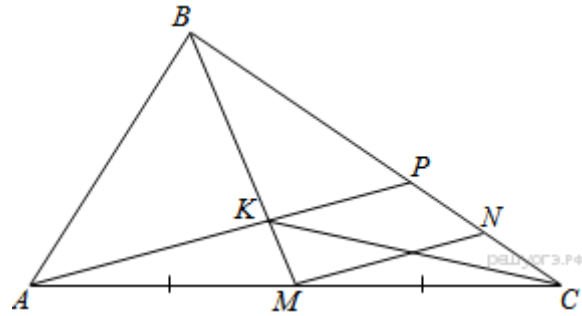
Ответ: 36.

3. В треугольнике ABC на его медиане BM отмечена точка K так, что $BK : KM = 4 : 1$. Прямая AK пересекает сторону BC в точке P . Найдите отношение площади треугольника ABK к площади четырёхугольника $KPCM$.

Решение.

Пусть площадь треугольника ABC равна S . Медиана делит треугольник на два равновеликих треугольника, значит, $S_{ABM} = S_{BMC} = \frac{S}{2}$. У треугольников ABK и ABM высота, проведенная к стороне BM , общая, поэтому площади этих треугольников относятся как их основания BK и BM , откуда:

$$S_{ABK} = \frac{BK}{BM} S_{ABM} = \frac{4}{5} S_{ABM} = \frac{2}{5} S.$$



Проведём прямую MN , параллельную AP . Точка M — середина AC , следовательно, MN — средняя линия треугольника APC , значит, $PN = CN$. По теореме Фалеса для угла MBC находим: $\frac{BP}{PN} = \frac{BK}{KM} = \frac{4}{1}$, а так как $PN = NC$ получаем, что $\frac{BP}{BC} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Стороны треугольников BKP и BMC сонаправлены, их площади относятся как произведение отношений сонаправленных сторон, поэтому

$$\frac{S_{BKP}}{S_{BMC}} = \frac{BK}{BM} \cdot \frac{BP}{BC} = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{15},$$

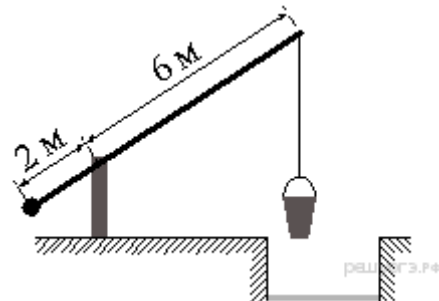
то есть $S_{BKP} = \frac{8}{15} S_{BMC}$, откуда $S_{KPCM} = \frac{7}{15} S_{BMC} = \frac{7}{30} S$.

Тем самым, для искомого отношения площадей имеем:

$$\frac{S_{ABK}}{S_{KPCM}} = \frac{\frac{2}{5} S}{\frac{7}{30} S} = \frac{2}{5} \cdot \frac{30}{7} = \frac{12}{7}.$$

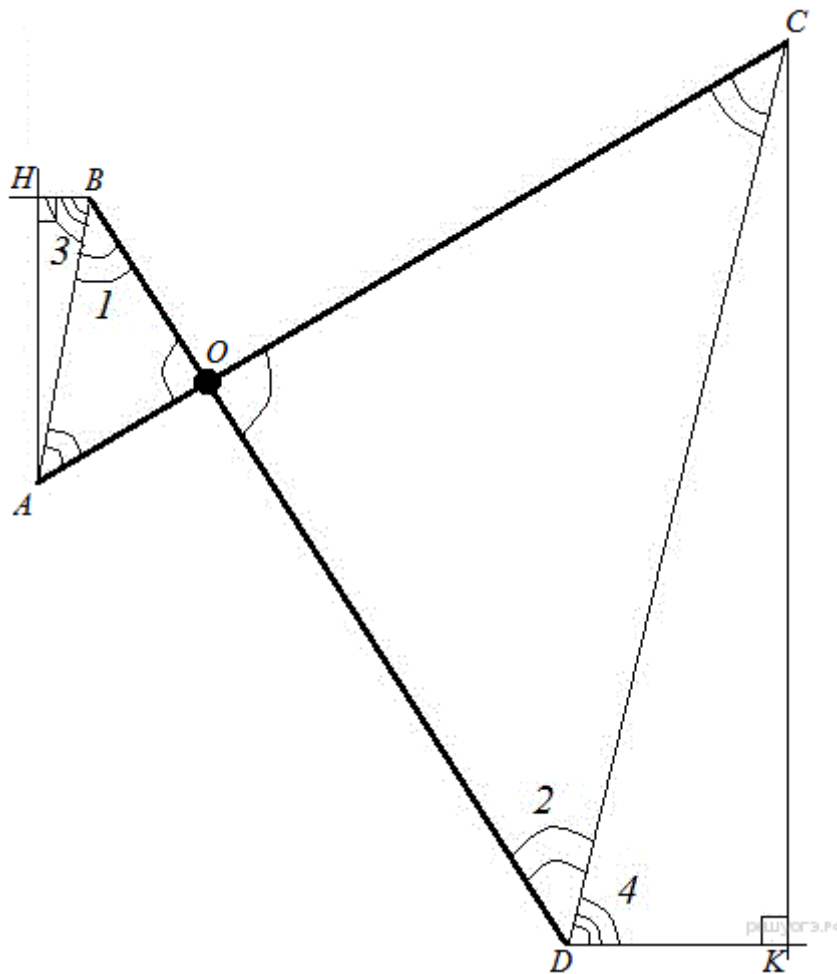
Ответ: $\frac{S_{ABK}}{S_{KPCM}} = \frac{12}{7}$.

4. На рисунке изображён колодец с «журавлём». Короткое плечо имеет длину 2 м, а длинное плечо — 6 м. На сколько метров опустится конец длинного плеча, когда конец короткого поднимется на 0,5 м?



Решение.

Введём обозначения как показано на рисунке. Здесь AC — положение «журавля» до опускания, BD — положение после опускания, AH — высота, на которую поднялся конец короткого плеча, CK — высота, на которую опустился конец длинного.



В равнобедренных треугольниках AOB и COD углы AOB и COD , противолежащие основаниям, равны как вертикальные, поэтому равны и углы при их основаниях. Тем самым, эти треугольники подобны по двум углам, и

$$\frac{OC}{AO} = \frac{OD}{BO} = \frac{CD}{AB} = 3.$$

Накрест лежащие углы 1 и 2, образованные при пересечении секущей BD прямых AB и CD , равны, поэтому прямые AB и CD параллельны. Тогда стороны углов 3 и 4 попарно параллельны, а значит, эти углы равны.

Следовательно, прямоугольные треугольники AHB и CDK подобны, поскольку имеют равные острые углы. Имеем:

$$\frac{CD}{AB} = \frac{CK}{AH} \Leftrightarrow CK = AH \frac{CD}{AB} \Leftrightarrow CK = 0,5 \cdot 3 = 1,5.$$

Ответ: 1,5.

5. Через середину K медианы BM треугольника ABC и вершину A проведена прямая, пересекающая сторону BC в точке P . Найдите отношение площади четырёхугольника $KPCM$ к площади треугольника AMK .

Решение.

Проведём отрезок MT , параллельный AP , вспомним, что точка M , — середина AC , следовательно, MT — средняя линия треугольника APC , значит $CT = TP$. Аналогично KP — средняя линия треугольника BM , то есть $BP = PT$.

Пусть площадь треугольника BKP равна S . Рассмотрим треугольник KPC он имеет общую высоту с треугольником BKP и вдвое большее основание, следовательно его площадь равна $2S$. Площадь треугольника BKC равна $3S$ и такую же площадь имеет треугольник CMK , поскольку они имеют одну высоту, проведённую из вершины C и равные основания. Аналогично площадь треугольника CMK , равна площади треугольника AKM , а площадь треугольника AKM равна площади треугольника ABK .

Подведём итог:

$$S_{BKP} = S, S_{KPC} = 2S, S_{CMK} = S_{AMK} = S_{ABK} = 3S, S_{KPCM} = 5S.$$

Отношение площади четырёхугольника $KPCM$ к площади четырёхугольника AMK :

$$\frac{S_{KPCM}}{S_{AMK}} = \frac{5S}{3S} = \frac{5}{3}.$$

Ответ: $\frac{5}{3}$.

6. Медиана BM и биссектриса AP треугольника ABC пересекаются в точке K , длина стороны AC втрое больше длины стороны AB . Найдите отношение площади четырёхугольника $KPCM$ к площади треугольника ABC .

Решение.

Пусть площадь треугольника ABC равна S . Медиана делит треугольник на два равновеликих треугольника, поэтому $S_{ABM} = S_{BMC} = \frac{1}{2}S$. Биссектриса делит площадь треугольника пропорционально прилежащим сторонам, то есть:

$$\frac{S_{ABP}}{S_{APC}} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{3}.$$

Откуда $S_{ABP} = \frac{1}{4}S$, $S_{APC} = \frac{3}{4}S$. Рассмотрим треугольник ABM : AK — биссектриса, следовательно:

$$\frac{S_{ABK}}{S_{AKM}} = \frac{AB}{AM} = \frac{2}{3}.$$

Откуда $S_{ABK} = \frac{2}{5}S_{ABM} = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2}S = \frac{1}{5}S$, $S_{AKM} = \frac{3}{5}S_{ABM} = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2}S = \frac{3}{10}S$. Выразим площадь треугольника BPK :

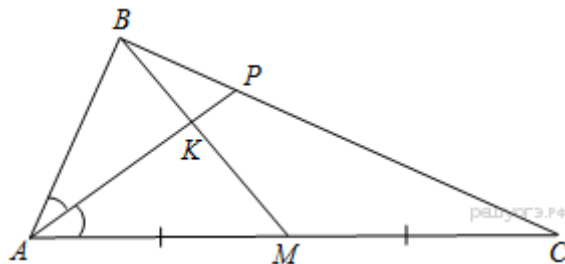
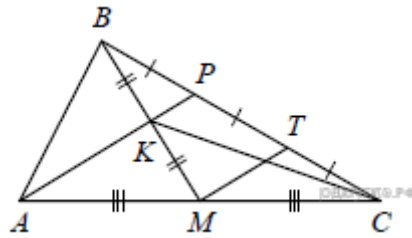
$$S_{BPK} = S_{ABP} - S_{ABK} = \frac{1}{4}S - \frac{1}{5}S = \frac{1}{20}S.$$

Найдём отношение площади четырёхугольника $KPCM$ к площади треугольника ABC :

$$\frac{S_{KPCM}}{S_{ABC}} = \frac{S_{BMC} - S_{BPK}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2}S - \frac{1}{20}S}{S} = \frac{\frac{9}{20}S}{S} = \frac{9}{20}.$$

Ответ: $\frac{9}{20}$.

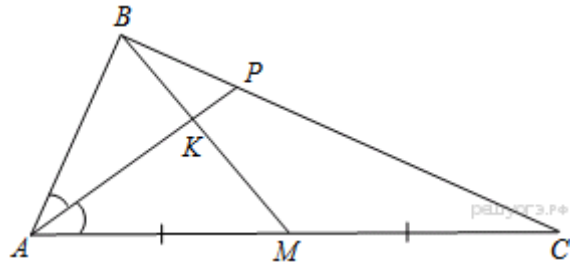
7. Медиана BM и биссектриса AP треугольника ABC пересекаются в точке K , длина стороны AC втрое больше длины стороны AB . Найдите отношение площади треугольника ABK к площади четырёхугольника $KPCM$.



Решение.

Пусть площадь треугольника ABC равна S . Медиана делит треугольник на два равновеликих треугольника, поэтому $S_{ABM} = S_{BMC} = \frac{1}{2}S$. Биссектриса делит площадь треугольника пропорционально прилежащим сторонам, то есть:

$$\frac{S_{ABP}}{S_{APC}} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{3}.$$



Откуда $S_{ABP} = \frac{1}{4}S$, $S_{APC} = \frac{3}{4}S$. Рассмотрим треугольник ABM : AK — биссектриса, следовательно:

$$\frac{S_{ABK}}{S_{AKM}} = \frac{AB}{AM} = \frac{2}{3}.$$

Откуда $S_{ABK} = \frac{2}{5}S_{ABM} = \frac{1}{5}S$, $S_{AKM} = \frac{3}{5}S_{ABM} = \frac{3}{10}S$. Выразим площадь треугольника BPK :

$$S_{BPK} = S_{ABP} - S_{ABK} = \frac{1}{4}S - \frac{1}{5}S = \frac{1}{20}S.$$

Найдём отношение площади треугольника ABK к площади четырёхугольника $KPCM$:

$$\frac{S_{ABK}}{S_{KPCM}} = \frac{S_{AKM}}{S_{BMC} - S_{BPK}} = \frac{\frac{1}{5}S}{\frac{1}{2}S - \frac{1}{20}S} = \frac{1}{5} \cdot \frac{20}{9} = \frac{4}{9}.$$

Ответ: $\frac{4}{9}$.

8. Найдите острые углы прямоугольного треугольника, если его гипотенуза равна 12, а площадь равна 18.

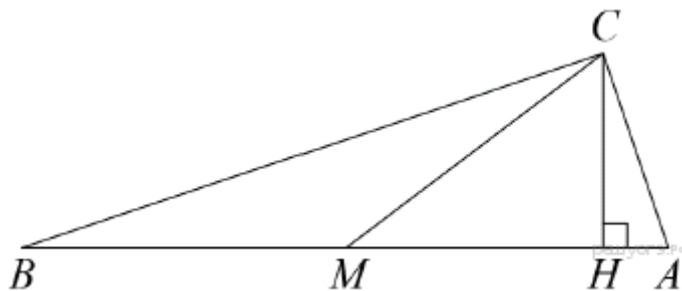
Решение.

Из вершины C прямого угла прямоугольного треугольника ABC проведём медиану CM и высоту CH . Тогда

$$CM = \frac{1}{2}AB = 6$$

$$CH = \frac{2S_{\triangle ABC}}{AB} = \frac{2 \cdot 18}{12} = 3$$

В прямоугольном треугольнике CHM катет CH равен половине гипотенузы CM , поэтому $\angle CMH = 30^\circ$.



Следовательно, $\angle BAC = 75^\circ$.

Ответ: $15^\circ, 75^\circ$.

9. В треугольнике ABC биссектриса BE и медиана AD перпендикулярны и имеют одинаковую длину, равную 96. Найдите стороны треугольника ABC .

Решение.

Пусть P — точка пересечения отрезков BE и AD (см. рис.). Треугольник ABD — равнобедренный, так как его биссектриса BP является высотой. Поэтому

$$AP = PD = 48; BC = 2BD = 2AB.$$

По свойству биссектрисы треугольника

$$\frac{CE}{AE} = \frac{BC}{AB} \Leftrightarrow \frac{CE}{AE} = 2 \Leftrightarrow AC = 3AE.$$

Проведём через вершину B прямую, параллельную AC . Пусть K — точка пересечения этой прямой с продолжением медианы AD . Тогда $BK = AC = 3AE$.

Из подобия треугольников APE и KPB следует, что $\frac{PE}{BP} = \frac{AE}{BK} = \frac{1}{3}$. Поэтому $PE = 24$ и $PB = 72$. Следовательно

$$AB = \sqrt{AP^2 + BP^2} = 24\sqrt{13}; BC = 2AB = 48\sqrt{13};$$

$$AE = \sqrt{AP^2 + EP^2} = 24\sqrt{5}; AC = 3AE = 72\sqrt{5}.$$

Ответ: $24\sqrt{13}; 48\sqrt{13}; 72\sqrt{5}$.

10. Медиана BM и биссектриса AP треугольника ABC пересекаются в точке K , длина стороны AC относится к длине стороны AB как 9:7. Найдите отношение площади треугольника ABK к площади четырёхугольника $KPCM$.

Решение.

Пусть площадь треугольника ABC равна S . Медиана делит треугольник на два равновеликих треугольника, поэтому $S_{ABM} = S_{BMC} = \frac{1}{2}S$. Биссектриса делит площадь треугольника пропорционально прилежащим сторонам, то есть:

$$\frac{S_{ABP}}{S_{APC}} = \frac{AB}{AC} = \frac{7}{9}.$$

Откуда $S_{ABP} = \frac{7}{16}S$, $S_{APC} = \frac{9}{16}S$. Рассмотрим треугольник ABM : AK — биссектриса, следовательно:

$$\frac{S_{ABK}}{S_{AKM}} = \frac{AB}{AM} = \frac{14}{9}.$$

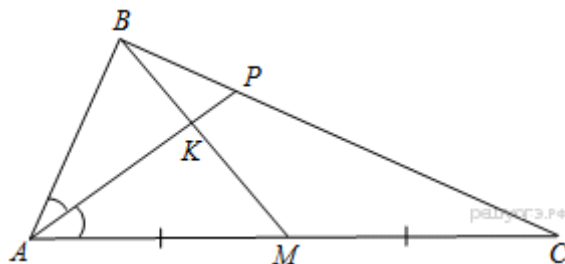
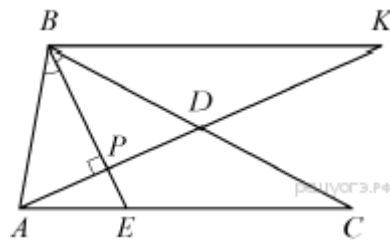
Откуда $S_{ABK} = \frac{14}{23}S_{ABM} = \frac{7}{23}S$, $S_{AKM} = \frac{9}{23}S_{ABM} = \frac{9}{46}S$. Выразим площадь треугольника BPK :

$$S_{BPK} = S_{ABP} - S_{ABK} = \frac{7}{16}S - \frac{7}{23}S = \frac{49}{368}S.$$

Найдём отношение площади треугольника ABK к площади четырёхугольника $KPCM$:

$$\frac{S_{ABK}}{S_{KPCM}} = \frac{S_{ABK}}{S_{BMC} - S_{BPK}} = \frac{\frac{7}{23}S}{\frac{1}{2}S - \frac{49}{368}S} = \frac{368}{135} \cdot \frac{7}{23} = \frac{112}{135}.$$

Ответ: $\frac{112}{135}$.



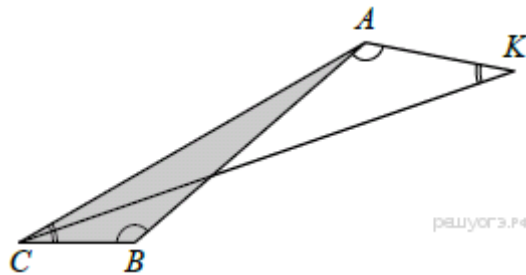
11. Стороны AC, AB, BC треугольника ABC равны $2\sqrt{5}, \sqrt{13}, 1$ соответственно. Точка K расположена вне треугольника ABC , причем отрезок KC пересекает отрезок AB в точке, отличной от B . Известно, что треугольник с вершинами K, A и C подобен исходному. Найдите косинус угла AKC , если $\angle KAC > 90^\circ$.

Решение.

Рассмотрим подобные треугольники ABC и AKC и установим соответствие между их углами. AC — наибольшая сторона треугольника ABC , а значит, ABC — наибольший угол треугольника ABC . Так как в треугольнике AKC есть тупой угол KAC , то в треугольнике ABC это угол ABC . Следовательно, угол ACB треугольника ABC не равен углу KAC треугольника AKC . Он также не равен углу KCA т. к. больше его (луч CK проходит между лучами CA и CB). Следовательно, $\angle AKC = \angle ACB$. По теореме косинусов в треугольнике ABC имеем:

$$\cos \angle AKC = \cos \angle ACB = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2AC \cdot BC} \Leftrightarrow \cos \angle ACB = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Ответ: $\cos \angle ACB = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.



12. Одна из биссектрис треугольника делится точкой пересечения биссектрис в отношении 40:1, считая от вершины. Найдите периметр треугольника, если длина стороны треугольника, к которой эта биссектриса проведена, равна 30.

Решение.

Проведем построения и введем обозначения как показано на рисунке. Рассмотрим треугольник ACE , CO — биссектриса, по свойству биссектрисы:

$$\frac{AO}{OE} = \frac{AC}{CE} \Leftrightarrow AC = 40CE.$$

Рассмотрим треугольник ABE , BO — биссектриса, по свойству биссектрисы:

$$\frac{AO}{OE} = \frac{AB}{BE} \Leftrightarrow AB = 40BE.$$

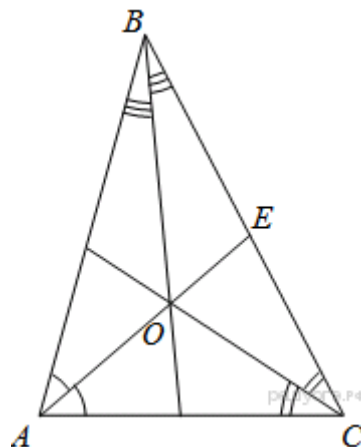
Складывая два получившихся равенства, получаем:

$$AB + AC = 40(CE + BE) = 40BC = 1200.$$

Таким образом, периметр треугольника ABC равен 1230.

Ответ: 1230.

13. Найдите острые углы прямоугольного треугольника, если его гипотенуза равна 28, а площадь равна 98.



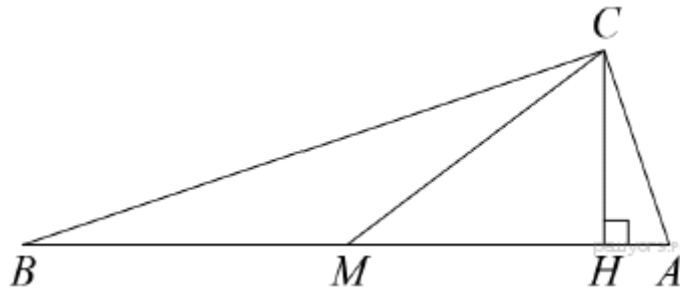
Решение.

Из вершины C прямого угла прямоугольного треугольника ABC проведём медиану CM и высоту CH . Тогда

$$CM = \frac{1}{2}AB = 14$$

$$CH = \frac{2S_{\triangle ABC}}{AB} = \frac{2 \cdot 98}{28} = 7$$

В прямоугольном треугольнике CHM катет CH равен половине гипотенузы CM , поэтому $\angle CMH = 30^\circ$.



Следовательно, $\angle BAC = 75^\circ$.

Ответ: $15^\circ, 75^\circ$.

14. В треугольнике ABC на его медиане BM отмечена точка K так, что $BK : KM = 10 : 9$. Прямая AK пересекает сторону BC в точке P . Найдите отношение площади четырёхугольника $KPCM$ к площади треугольника ABC

Решение.

Пусть площадь треугольника ABC равна S .

Проведём прямую MN , параллельную AP . Точка M — середина AC , следовательно, MN — средняя линия треугольника APC , значит, $PN = CN$. По теореме Фалеса для угла MBC находим:

$$\frac{BP}{PN} = \frac{BK}{KM} = \frac{10}{9}, \text{ а так как } PN = NC \text{ получаем, что}$$

$$\frac{BP}{BC} = \frac{10}{28} = \frac{5}{14}.$$

Стороны треугольников BKP и BMC сонаправлены, их площади относятся как произведение отношений сонаправленных сторон, поэтому

$$\frac{S_{BKP}}{S_{BMC}} = \frac{BK}{BM} \cdot \frac{BP}{BC} = \frac{10}{19} \cdot \frac{5}{14} = \frac{25}{133},$$

то есть $S_{BKP} = \frac{25}{133}S_{BMC}$, откуда $S_{KPCM} = \frac{108}{133}S_{BMC}$, в то время как $S_{BMC} = \frac{1}{2}S_{ABC}$, следовательно,

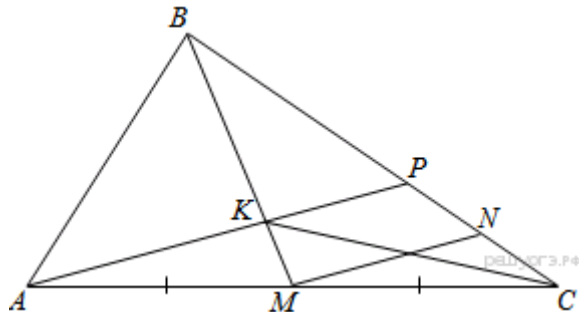
$$S_{KPCM} = \frac{108}{133} \cdot \frac{1}{2}S_{ABC} = \frac{54}{133}S_{ABC}$$

Тем самым, для искомого отношения площадей имеем:

$$\frac{S_{KPCM}}{S_{ABC}} = \frac{54}{133}$$

Ответ: $\frac{54}{133}$

15. Одна из биссектрис треугольника делится точкой пересечения биссектрис в отношении 7:2, считая от вершины. Найдите периметр треугольника, если длина стороны треугольника, к которой эта биссектриса проведена, равна 16.



Решение.

Проведем построения и введём обозначения как показано на рисунке. Рассмотрим треугольник ACE , CO — биссектриса, по свойству биссектрисы:

$$\frac{AO}{OE} = \frac{AC}{CE} \Leftrightarrow AC = \frac{7}{2}CE.$$

Рассмотрим треугольник ABE , BO — биссектриса, по свойству биссектрисы:

$$\frac{AO}{OE} = \frac{AB}{BE} \Leftrightarrow AB = \frac{7}{2}BE.$$

Складывая два получившихся равенства, получаем:

$$AB + AC = \frac{7}{2}(CE + BE) = \frac{7}{2}BC = 56.$$

Таким образом, периметр треугольника ABC равен 72.

Ответ: 72.

16. В треугольнике ABC биссектриса BE и медиана AD перпендикулярны и имеют одинаковую длину, равную 84. Найдите стороны треугольника ABC .

Решение.

Пусть P — точка пересечения отрезков BE и AD (см. рис.). Треугольник ABD — равнобедренный, так как его биссектриса BP является высотой. Поэтому

$$AP = PD = 42; BC = 2BD = 2AB.$$

По свойству биссектрисы треугольника

$$\frac{CE}{AE} = \frac{BC}{AB} \Leftrightarrow \frac{CE}{AE} = 2 \Leftrightarrow AC = 3AE.$$

Проведём через вершину B прямую, параллельную AC . Пусть K — точка пересечения этой прямой с продолжением медианы AD . Тогда $BK = AC = 3AE$.

Из подобия треугольников APE и KPB следует, что $\frac{PE}{BP} = \frac{AE}{BK} = \frac{1}{3}$. Поэтому $PE = 21$ и $PB = 63$.

Следовательно

$$AB = \sqrt{AP^2 + BP^2} = 21\sqrt{13}; BC = 2AB = 42\sqrt{13};$$

$$AE = \sqrt{AP^2 + EP^2} = 21\sqrt{5}; AC = 3AE = 63\sqrt{5}.$$

Ответ: $21\sqrt{13}$; $42\sqrt{13}$; $63\sqrt{5}$.

