

Числовые последовательности

1. Последовательность задана формулой $c_n = n^2 - 1$. Какое из указанных чисел является членом этой последовательности?

1) 1

2) 2

3) 3

4) 4

Решение.

Рассмотрим несколько первых членов последовательности, начиная с $n = 1$:

$$n = 1 : \quad c_1 = 1 - 1 = 0.$$

$$n = 2 : \quad c_2 = 4 - 1 = 3.$$

$$n = 3 : \quad c_3 = 9 - 1 = 8.$$

Тем самым, число 3 является членом этой последовательности.

Ответ: 3.

2. Последовательность задана формулой $c_n = n + \frac{(-1)^n}{n}$. Какое из следующих чисел не является членом этой последовательности?

1) $2\frac{1}{2}$

2) $4\frac{1}{4}$

3) $5\frac{1}{5}$

4) $6\frac{1}{6}$

Решение.

Рассмотрим несколько первых членов последовательности, начиная с $n = 2$:

$$n = 2 : \quad c_2 = 2 + \frac{(-1)^2}{2} = 2\frac{1}{2},$$

$$n = 3 : \quad c_3 = 3 + \frac{(-1)^3}{3} = 2\frac{2}{3},$$

$$n = 4 : \quad c_4 = 4 + \frac{(-1)^4}{4} = 4\frac{1}{4},$$

$$n = 5 : \quad c_5 = 5 + \frac{(-1)^5}{5} = 4\frac{4}{5},$$

$$n = 6 : \quad c_6 = 6 + \frac{(-1)^6}{6} = 6\frac{1}{6},$$

Тем самым, число $5\frac{1}{5}$ не является членом этой последовательности.

Ответ: 3.

3. Какое из указанных чисел не является членом последовательности $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$?

1) $\frac{1}{2}$

2) $-\frac{1}{3}$

3) $\frac{1}{16}$

4) $\frac{1}{17}$

Решение.

Рассмотрим несколько первых членов последовательности, начиная с $n = 2$:

$$\begin{aligned}n = 2 : \quad c_2 &= \frac{(-1)^2}{2} = \frac{1}{2}, \\n = 3 : \quad c_3 &= \frac{(-1)^3}{3} = -\frac{1}{3}, \\n = 4 : \quad c_4 &= \frac{(-1)^4}{4} = \frac{1}{4}, \\n = 5 : \quad c_5 &= \frac{(-1)^5}{5} = -\frac{1}{5}, \\n = 6 : \quad c_6 &= \frac{(-1)^6}{6} = \frac{1}{6}, \\n = 16 : \quad c_{16} &= \frac{(-1)^{16}}{16} = \frac{1}{16},\end{aligned}$$

Тем самым, $\frac{1}{17}$ не является членом этой последовательности.

Ответ: 4.

4. Последовательность задана формулой $a_n = \frac{11}{n+1}$. Сколько членов в этой последовательности больше 1?

- 1) 8 2) 9 3) 10 4) 11

Решение.

Дробь, числитель и знаменатель которой положительны, больше единицы, если числитель больше знаменателя. Поэтому, имеем: $n+1 < 11 \Leftrightarrow n < 10$. Таким образом, правильный ответ указан под номером 2.

Ответ: 2.

5. Последовательности заданы несколькими первыми членами. Одна из них — арифметическая прогрессия. Укажите ее.

- 1) 1; 2; 3; 5; ... 2) 1; 2; 4; 8; ... 3) 1; 3; 5; 7; ... 4) $1; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \dots$

Решение.

Арифметической прогрессией называется такая последовательность в которой разность между последующим и предыдущим членами прогрессии остается неизменной. Поэтому арифметическая прогрессия является последовательность: 1; 3; 5; ... Таким образом, правильный ответ указан под номером 3.

Ответ: 3.

6. Одна из данных последовательностей является геометрической прогрессией. Укажите эту последовательность.

- 1) 10; 6; 2; -2; ... 2) $5; \frac{5}{2}; \frac{5}{4}; \frac{5}{8}; \dots$ 3) 1; 2; 3; 5; ... 4) $\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \dots$

Решение.

Геометрической прогрессией называют числовую последовательность, первый член которой отличен от нуля, а каждый последующий, равен предшествующему, умноженному на одно и тоже отличное от нуля число. Поэтому геометрической прогрессией является последовательность: $5; \frac{5}{2}; \frac{5}{4}; \frac{5}{8}; \dots$

Таким образом, правильный ответ указан под номером 2.

Ответ: 2.

7. Какая из следующих последовательностей является арифметической прогрессией?

- 1) Последовательность натуральных степеней числа 2.
- 2) Последовательность натуральных чисел, кратных 5.
- 3) Последовательность кубов натуральных чисел.
- 4) Последовательность всех правильных дробей, числитель которых на 1 меньше знаменателя.

Решение.

Арифметической прогрессией называется такая последовательность в которой разность между последующим и предыдущим членами прогрессии остается неизменной. Поэтому арифметическая прогрессия является последовательность: 5; 10; 15; ... Таким образом, правильный ответ указан под номером 2.

Ответ: 2.

8. Последовательность задана условиями $c_1 = -3, c_{n+1} = c_n - 1$. Найдите c_7 .

Решение.

Будем вычислять последовательно: $c_2 = -4; c_3 = -5; c_4 = -6; c_5 = -7; c_6 = -8; c_7 = -9$.

Данная последовательность образует арифметическую прогрессию. Найдем разность арифметической прогрессии:

$$c_n = c_1 + d(n-1), c_{n+1} = c_1 + d(n-1) - 1, \text{ тогда} \\ d = c_{n+1} - c_n = -3 + d(n-1) - 1 + 3 - d(n-1) = -1,$$

Примечание.

Зная разность и первый член арифметической прогрессии, можно найти c_7 посредственно:

$$c_7 = a_1 + 6d = -3 - 1(7-1) = -3 - 1 \cdot 6 = -3 - 6 = -9.$$

Ответ: -9.

9. Последовательность задана условиями $b_1 = 4, b_{n+1} = -\frac{1}{b_n}$. Найдите b_7 .

Решение.

Найдём несколько первых членов последовательности:

$$b_2 = -\frac{1}{b_1} = -\frac{1}{4}, \quad b_3 = -\frac{1}{b_2} = 4, \quad b_4 = -\frac{1}{b_3} = -\frac{1}{4}, \quad \dots$$

Отсюда ясно, что все члены последовательности с нечётными номерами равны 4.

Ответ: 4.

Примечание.

Из рекуррентной формулы, задающей n -й член последовательности, можно непосредственно получить, что

$$b_{n+2} = -\frac{1}{b_{n+1}} = -\frac{1}{-\frac{1}{b_n}} = b_n,$$

Отсюда ясно, что все члены последовательности с нечётными номерами равны первому члену последовательности, а все члены последовательности с чётными равны второму члену последовательности.

10. Последовательность задана формулой $a_n = \frac{34}{n+1}$. Сколько членов в этой последовательности больше 6?

Решение.

Необходимо решить неравенство:

$$\frac{34}{n+1} > 6 \Leftrightarrow 34 > 6n + 6 \Leftrightarrow 6n < 28 \Leftrightarrow n < 4,6(6).$$

Поскольку n — целые числа, неравенство выполняется при n равном 1, 2, 3 и 4. Таким образом, четыре члена данной последовательности больше 6.

Ответ: 4.

11. Сколько натуральных чисел n удовлетворяет неравенству $\frac{40}{n+1} > 2$?

Решение.

Дробь, числитель и знаменатель которой положительны, больше двух, если числитель больше знаменателя более чем в два раза. Поэтому, имеем: $2 \cdot (n+1) < 40 \Leftrightarrow n < 19$. Таким образом, восемнадцать натуральных чисел удовлетворяют данному неравенству.

Ответ: 18.

12. Последовательность задана формулой $a_n = \frac{16}{n+1}$. Сколько членов в этой последовательности больше 3?

Решение.

$\frac{16}{n+1} > 3 \Leftrightarrow 16 > 3 \cdot (n+1) \Leftrightarrow 16 > 3n + 3 \Leftrightarrow 13 > 3n \Leftrightarrow n < 4,3$ Таким образом, правильный ответ 4.

Ответ: 4.