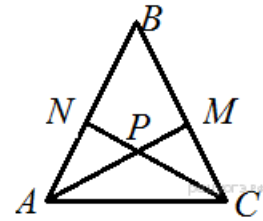


Равнобедренные треугольники

1. В равностороннем треугольнике ABC биссектрисы CN и AM пересекаются в точке P . Найдите $\angle MPN$.

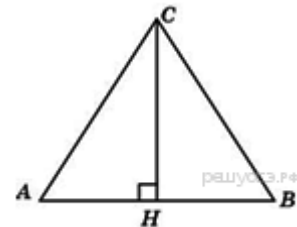


Решение.

В равностороннем треугольнике ABC все углы равны 60° . Биссектрисы CN и AM делят углы пополам, поэтому $\angle ACN = \angle MAC = 60^\circ : 2 = 30^\circ$. Сумма углов в треугольнике равна 180° , поэтому $\angle APC = 180^\circ - 30^\circ - 30^\circ = 120^\circ$. Вертикальные углы равны, следовательно, $\angle MPN = \angle APC = 120^\circ$.

Ответ: 120.

2. В равнобедренном треугольнике ABC $AC = BC$. Найдите AC , если высота $CH = 12$, $AB = 10$.



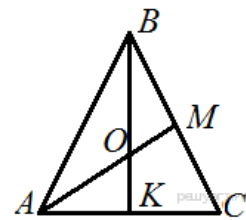
Решение.

В равнобедренном треугольнике высота, опущенная на основание делит основание пополам, то есть CH делит AB пополам. Тогда получаем прямоугольный треугольник ACH с двумя известными катетами $CH = 12$ и $HA = \frac{AB}{2} = \frac{10}{2} = 5$, гипотенузой которого является искомая AC . По теореме Пифагора найдем

$$AC = \sqrt{CH^2 + HA^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13.$$

Ответ: 13.

3. В равностороннем треугольнике ABC медианы BK и AM пересекаются в точке O . Найдите $\angle AOK$.

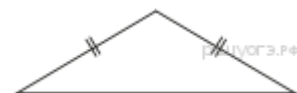


Решение.

Медианы в равностороннем треугольнике являются биссектрисами и высотами, поэтому $\angle MAK = 30^\circ$. Треугольник AOK — прямоугольный, поэтому $\angle AOK = 60^\circ$.

Ответ: 60.

4. Площадь равнобедренного треугольника равна $196\sqrt{3}$. Угол, лежащий напротив основания равен 120° . Найдите длину боковой стороны.



Решение.

Пусть длина боковой стороны равна a . Площадь треугольника можно найти как половину произведения сторон на синус угла между ними:

$$S = \frac{1}{2}a \cdot a \sin 120^\circ \Leftrightarrow a = \sqrt{\frac{2S}{\sin 120^\circ}},$$

$$a = \sqrt{\frac{2 \cdot 196\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}} = 2 \cdot 14 = 28.$$

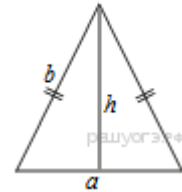
Ответ: 28.

5. Периметр равнобедренного треугольника равен 196, а основание — 96. Найдите площадь треугольника.

Решение.

Пусть a — длина основания равнобедренного треугольника, b — длина боковой стороны равнобедренного треугольника, h — длина основания проведенного к высоте. Найдём длину боковой стороны:

$$b = \frac{P - a}{2} = \frac{196 - 96}{2} = 50.$$



Высота равнобедренного треугольника, проведенная к основанию, также является его биссектрисой и медианой. Из прямоугольного треугольника найдём высоту по теореме Пифагора:

$$h = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{50^2 - 48^2} = \sqrt{2^2(25^2 - 24^2)} = 2 \cdot \sqrt{49} = 14.$$

Площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту:

$$S = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2} \cdot 96 \cdot 14 = 672.$$

Ответ: 672.

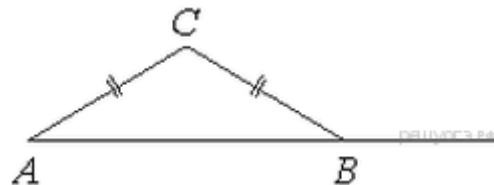
Примечание.

Пусть p — полупериметр треугольника. Можно не находить высоту, а найти площадь по формуле Герона:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{98(98-96)(98-50)(98-50)} =$$

$$= \sqrt{98 \cdot 2 \cdot 48 \cdot 48} = 48\sqrt{49 \cdot 2 \cdot 2} = 48 \cdot 7 \cdot 2 = 672.$$

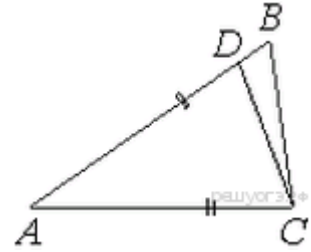
6. В треугольнике ABC $AC = BC$. Внешний угол при вершине B равен 146° . Найдите угол C . Ответ дайте в градусах.

**Решение.**

Сумма смежных углов равна 180° , откуда $\angle CAB = 180^\circ - 146^\circ = 34^\circ$. Треугольник ABC — равнобедренный, поэтому $\angle CAB = \angle CBA = 34^\circ$. Сумма углов треугольника равна 180° , следовательно, $\angle C = 180^\circ - \angle CAB - \angle CBA = 180^\circ - 34^\circ - 34^\circ = 112^\circ$.

Ответ: 112.

7. Точка D на стороне AB треугольника ABC выбрана так, что $AD = AC$. Известно, что $\angle CAB = 80^\circ$ и $\angle ACB = 59^\circ$. Найдите угол DCB . Ответ дайте в градусах.

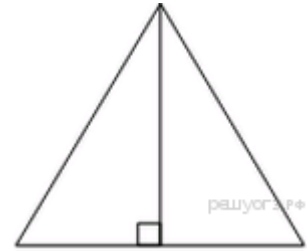


Решение.

Треугольник ACD — равнобедренный, поэтому $\angle ADC = \angle ACD = \frac{180^\circ - 80^\circ}{2} = 50^\circ$. Найдём угол DCB : $\angle DCB = \angle ACB - \angle ACD = 59^\circ - 50^\circ = 9^\circ$.

Ответ: 9.

8. Высота равностороннего треугольника равна $15\sqrt{3}$. Найдите его периметр.

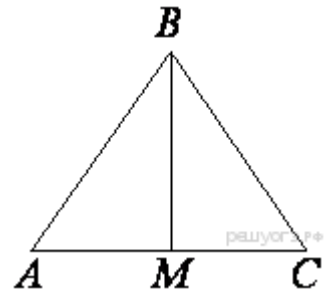


Решение.

Высота равностороннего треугольника равна $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, следовательно, сторона треугольника $a = 15\sqrt{3} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = 30$. Таким образом, периметр равностороннего треугольника равен $3 \cdot 30 = 90$.

Ответ: 90.

9. В треугольнике ABC $AB = BC = 53$, $AC = 56$. Найдите длину медианы BM .



Решение.

Треугольник ABC — равнобедренный, поэтому медиана, проведённая к основанию, является биссектрисой и высотой. Из прямоугольного треугольника ABM по теореме Пифагора найдём BM :

$$BM = \sqrt{AB^2 - AM^2} = \sqrt{AB^2 - \left(\frac{AC}{2}\right)^2} = \sqrt{53^2 - 28^2} = 45.$$

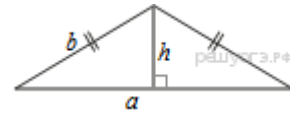
Ответ: 45.

10. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 10, а основание равно 12. Найдите площадь этого треугольника.



Решение.

Пусть a — длина основания равнобедренного треугольника, b — длина боковой стороны равнобедренного треугольника, h — длина основания проведенного к высоте. Высота равнобедренного треугольника, проведённая к основанию, также является его биссектрисой и медианой. Из прямоугольного треугольника найдём высоту по теореме Пифагора:



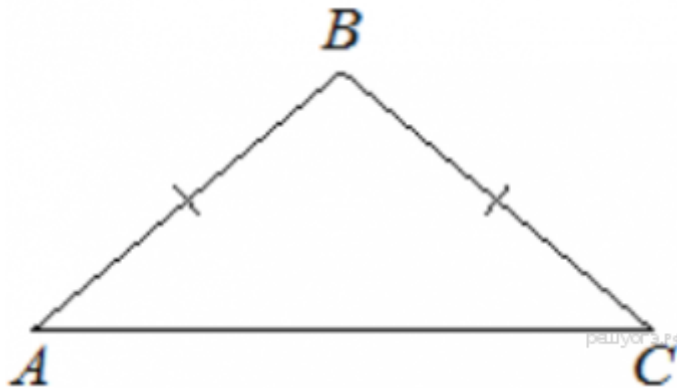
$$h = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8.$$

Площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту:

$$S = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 = 48.$$

Ответ: 48.

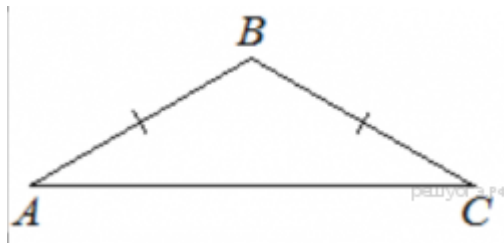
11. В треугольнике ABC известно, что $AB = BC$, $\angle ABC = 108^\circ$. Найдите угол BCA . Ответ дайте в градусах.

**Решение.**

Треугольник ABC - равнобедренный, следовательно, $\angle BAC = \angle BCA = \frac{180^\circ - 108^\circ}{2} = 36^\circ$

Ответ: 36

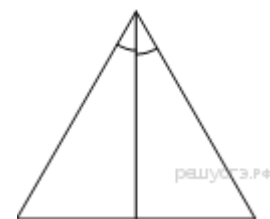
12. В треугольнике ABC известно, что $AB = BC$, $\angle ABC = 124^\circ$. Найдите угол BCA . Ответ дайте в градусах.

**Решение.**

Треугольник ABC - равнобедренный, следовательно, $\angle BCA = \angle BAC = \frac{180^\circ - 124^\circ}{2} = 28^\circ$

Ответ: 28

13. Сторона равностороннего треугольника равна $12\sqrt{3}$. Найдите биссектрису этого треугольника.



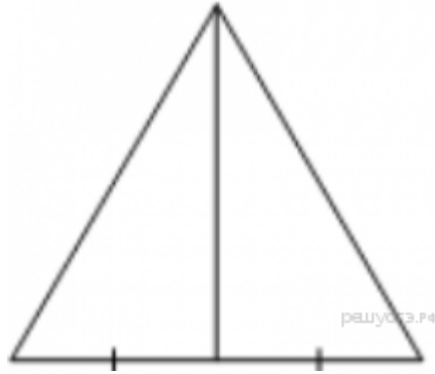
Решение.

Так как треугольник ABC равносторонний, то его биссектриса BH является и медианой, и высотой. Тогда треугольник ABH - прямоугольный. Тогда:

$$AB^2 = AH^2 + BH^2 = \left(\frac{AB}{2}\right)^2 + BH^2 \Leftrightarrow \frac{3}{4}AB^2 = BH^2 \Leftrightarrow BH = \sqrt{\frac{3}{4}AB^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}AB = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 12\sqrt{3} = 18$$

Ответ: 18

14. Сторона равностороннего треугольника равна $10\sqrt{3}$. Найдите медиану этого треугольника.

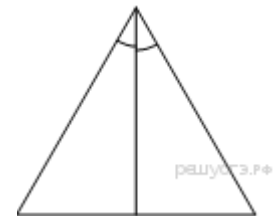
**Решение.**

Так как треугольник ABC равносторонний, то его медиана BH является и биссектрисой, и высотой. Тогда треугольник ABH - прямоугольный. Тогда:

$$AB^2 = AH^2 + BH^2 = \left(\frac{AB}{2}\right)^2 + BH^2 \Leftrightarrow \frac{3}{4}AB^2 = BH^2 \Leftrightarrow BH = \sqrt{\frac{3}{4}AB^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}AB = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 10\sqrt{3} = 15$$

Ответ: 15

15. Биссектриса равностороннего треугольника равна $12\sqrt{3}$. Найдите сторону этого треугольника.

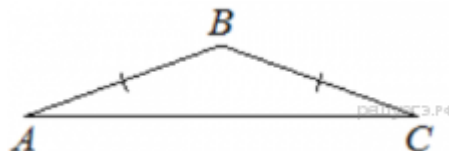
**Решение.**

Так как треугольник ABC равносторонний, то его биссектриса BH является и медианой, и высотой. Тогда треугольник ABH - прямоугольный. Тогда:

$$AB^2 = AH^2 + BH^2 = \left(\frac{AB}{2}\right)^2 + BH^2 \Leftrightarrow \frac{3}{4}AB^2 = BH^2 \Leftrightarrow AB = \sqrt{\frac{4}{3}BH^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}BH = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 12\sqrt{3} = 24$$

Ответ: 24

16. В треугольнике ABC известно, что $AB = BC$, $\angle ABC = 146^\circ$. Найдите угол BCA . Ответ дайте в градусах.



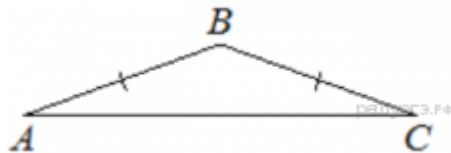
Решение.

Треугольник ABC - равнобедренный. Следовательно,

$$\angle BCA = \frac{180^\circ - 128^\circ}{2} = 26^\circ$$

Ответ: 26

17. В треугольнике ABC известно, что $AB = BC$, $\angle ABC = 144^\circ$. Найдите угол BCA . Ответ дайте в градусах.

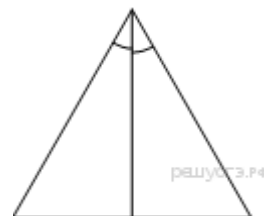
**Решение.**

Треугольник ABC - равнобедренный. Следовательно,

$$\angle BCA = \frac{180^\circ - 144^\circ}{2} = 18^\circ$$

Ответ: 18

18. Биссектриса равностороннего треугольника равна $13\sqrt{3}$. Найдите сторону этого треугольника.

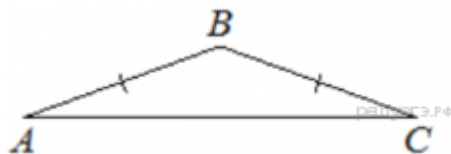
**Решение.**

Так как треугольник ABC равносторонний, то его биссектриса BH является и медианой, и высотой. Тогда треугольник ABH - прямоугольный. Тогда:

$$AB^2 = AH^2 + BH^2 = \left(\frac{AB}{2}\right)^2 + BH^2 \Leftrightarrow \frac{3}{4}AB^2 = BH^2 \Leftrightarrow AB = \sqrt{\frac{4}{3}BH^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}BH = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 13\sqrt{3} = 26$$

Ответ: 26

19. В треугольнике ABC известно, что $AB = BC$, $\angle ABC = 128^\circ$. Найдите угол BCA . Ответ дайте в градусах.

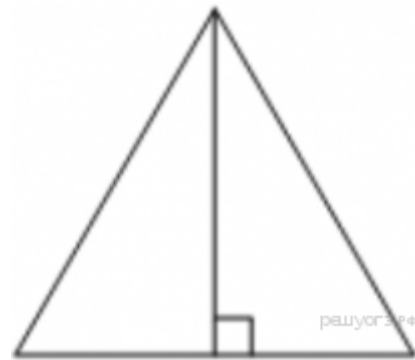
**Решение.**

Треугольник ABC - равнобедренный. Следовательно,

$$\angle BCA = \frac{180^\circ - 128^\circ}{2} = 26^\circ$$

Ответ: 26

20. Сторона равностороннего треугольника равна $16\sqrt{3}$. Найдите высоту этого треугольника.



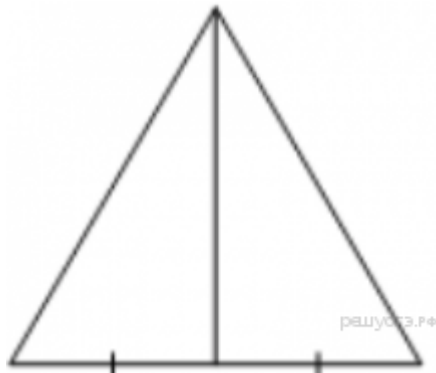
Решение.

Так как треугольник ABC равносторонний, то его высота BH является и медианой, и биссектрисой. Тогда треугольник ABH - прямоугольный. Тогда:

$$AB^2 = AH^2 + BH^2 = \left(\frac{AB}{2}\right)^2 + BH^2 \Leftrightarrow \frac{3}{4}AB^2 = BH^2 \Leftrightarrow BH = \sqrt{\frac{3}{4}AB^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}AB = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 16\sqrt{3} = 24$$

Ответ: 24

21. Сторона равностороннего треугольника равна $14\sqrt{3}$. Найдите медиану этого треугольника.



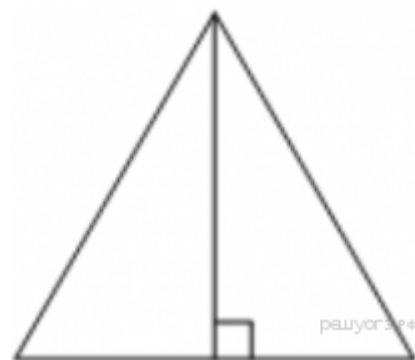
Решение.

Так как треугольник ABC равносторонний, то его медиана BH является и биссектрисой, и высотой. Тогда треугольник ABH - прямоугольный. Тогда:

$$AB^2 = AH^2 + BH^2 = \left(\frac{AB}{2}\right)^2 + BH^2 \Leftrightarrow \frac{3}{4}AB^2 = BH^2 \Leftrightarrow BH = \sqrt{\frac{3}{4}AB^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}AB = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 14\sqrt{3} = 21$$

Ответ: 21

22. Высота равностороннего треугольника равна $11\sqrt{3}$. Найдите сторону этого треугольника.



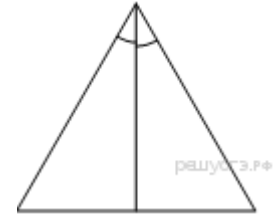
Решение.

Так как треугольник ABC равносторонний, то его высота BH является и медианой, и биссектрисой. Тогда треугольник ABH - прямоугольный. Тогда:

$$AB^2 = AH^2 + BH^2 = \left(\frac{AB}{2}\right)^2 + BH^2 \Leftrightarrow \frac{3}{4}AB^2 = BH^2 \Leftrightarrow AB = \sqrt{\frac{4}{3}BH^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}BH = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 11\sqrt{3} = 22$$

Ответ: 22

23. Биссектриса равностороннего треугольника равна $11\sqrt{3}$. Найдите сторону этого треугольника.

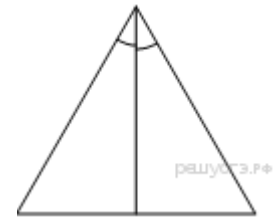
**Решение.**

Так как треугольник ABC равносторонний, то его биссектриса BH является и медианой, и высотой. Тогда треугольник ABH - прямоугольный. Тогда:

$$AB^2 = AH^2 + BH^2 = \left(\frac{AB}{2}\right)^2 + BH^2 \Leftrightarrow \frac{3}{4}AB^2 = BH^2 \Leftrightarrow AB = \sqrt{\frac{4}{3}BH^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}BH = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 11\sqrt{3} = 22$$

Ответ: 22

24. Сторона равностороннего треугольника равна $14\sqrt{3}$. Найдите биссектрису этого треугольника.

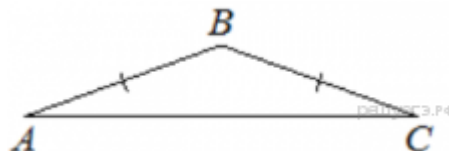
**Решение.**

Так как треугольник ABC равносторонний, то его биссектриса BH является и медианой, и высотой. Тогда треугольник ABH - прямоугольный. Тогда:

$$AB^2 = AH^2 + BH^2 = \left(\frac{AB}{2}\right)^2 + BH^2 \Leftrightarrow \frac{3}{4}AB^2 = BH^2 \Leftrightarrow BH = \sqrt{\frac{3}{4}AB^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}AB = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 14\sqrt{3} = 21$$

Ответ: 21

25. В треугольнике ABC известно, что $AB = BC$, $\angle ABC = 148^\circ$. Найдите угол BCA . Ответ дайте в градусах.

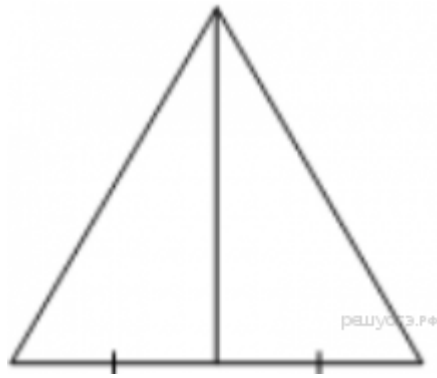
**Решение.**

Треугольник ABC - равнобедренный. Следовательно,

$$\angle BCA = \frac{180^\circ - 148^\circ}{2} = 16^\circ$$

Ответ: 16

26. Медиана равностороннего треугольника равна $11\sqrt{3}$. Найдите сторону этого треугольника.



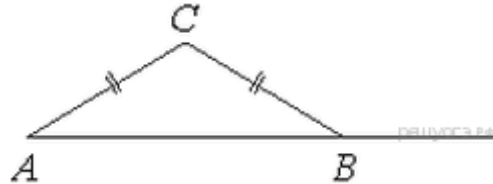
Решение.

Так как треугольник ABC равносторонний, то его медиана BH является и биссектрисой, и высотой. Тогда треугольник ABH - прямоугольный. Тогда:

$$AB^2 = AH^2 + BH^2 = \left(\frac{AB}{2}\right)^2 + BH^2 \Leftrightarrow \frac{3}{4}AB^2 = BH^2 \Leftrightarrow AB^2 = \frac{4}{3}BH^2 \Leftrightarrow AB = \sqrt{\frac{4}{3}BH^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}BH = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 11\sqrt{3} = 22$$

Ответ: 22

27. В треугольнике ABC $AC = BC$. Внешний угол при вершине B равен 140° . Найдите угол C .
 Ответ дайте в градусах.



Решение.

Сумма смежных углов равна 180° , откуда $\angle CAB = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$. Треугольник ABC — равнобедренный, поэтому $\angle CAB = \angle CBA = 40^\circ$. Сумма углов треугольника равна 180° , следовательно, $\angle C = 180^\circ - \angle CAB - \angle CBA = 180^\circ - 40^\circ - 40^\circ = 100^\circ$.

Ответ: 100.