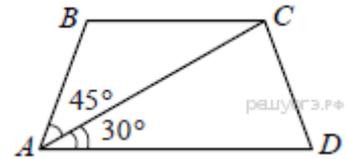


Трапеция

1. Найдите больший угол равнобедренной трапеции $ABCD$, если диагональ AC образует с основанием AD и боковой стороной AB углы, равные 30° и 45° соответственно.



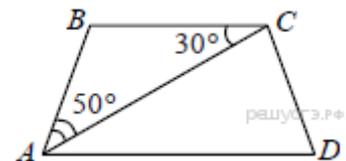
Решение.

Углы A и B — односторонние, поэтому угол B равен $180^\circ - 45^\circ - 30^\circ = 105^\circ$.

Ответ: 105.

Дублирует задание 315011.

2. Найдите угол ADC равнобедренной трапеции $ABCD$, если диагональ AC образует с основанием BC и боковой стороной AB углы, равные 30° и 50° соответственно.



Решение.

Сумма углов треугольника ABC равна 180° , поэтому угол ABC равен $180^\circ - 30^\circ - 50^\circ = 100^\circ$. Сумма противоположных углов равнобедренной трапеции равна 180° , поэтому $180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$.

Ответ: 80.

3. Сумма двух углов равнобедренной трапеции равна 140° . Найдите больший угол трапеции. Ответ дайте в градусах.

Решение.

Так как сумма односторонних углов трапеции равна 180° , в условии говорится о сумме углов при основании. Поскольку трапеция является равнобедренной, углы при основании равны. Значит, каждый из них равен 70° . Сумма односторонних углов трапеции равна 180° , поэтому больший угол равен $180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$.

Ответ: 110.

4. Сумма двух углов равнобедренной трапеции равна 220° . Найдите меньший угол трапеции. Ответ дайте в градусах.

Решение.

Так как сумма односторонних углов трапеции равна 180° , в условии говорится о сумме углов при основании. Поскольку трапеция является равнобедренной, углы при основании равны. Значит, каждый из них равен 110° . Сумма односторонних углов трапеции равна 180° , поэтому меньший угол равен $180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$.

Ответ: 70.

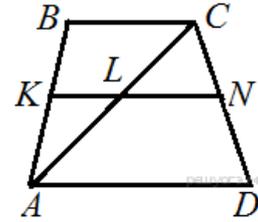
5. Найдите меньший угол равнобедренной трапеции, если два ее угла относятся как 1:2. Ответ дайте в градусах.

Решение.

Пусть x — меньший угол трапеции, а $2x$ — больший угол. У равнобедренной трапеции углы при основаниях равны, поэтому их сумма равна $x + 2x + x + 2x = 6x$. Поскольку она равна 360° , находим: $x = 60^\circ$.

Ответ: 60.

6. Основания трапеции равны 4 см и 10 см. Диагональ трапеции делит среднюю линию на два отрезка. Найдите длину большего из них.



Решение.

Пусть KN — средняя линия трапеции, где L — точка пересечения с диагональю.

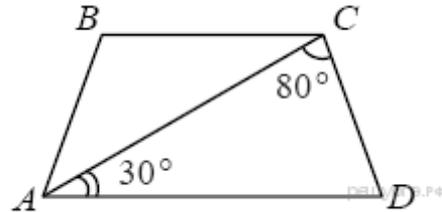
$$KN = \frac{10 + 4}{2} = 7 \text{ см.}$$

Так как KN — средняя линия трапеции, то KL и LN средние линии треугольников ABC и CAD соответственно.

$$KL = \frac{BC}{2} = 2 \text{ см, } LN = \frac{AD}{2} = 5 \text{ см.}$$

Ответ: 5.

7. Найдите угол ABC равнобедренной трапеции $ABCD$, если диагональ AC образует с основанием AD и боковой стороной CD углы, равные 30° и 80° соответственно.

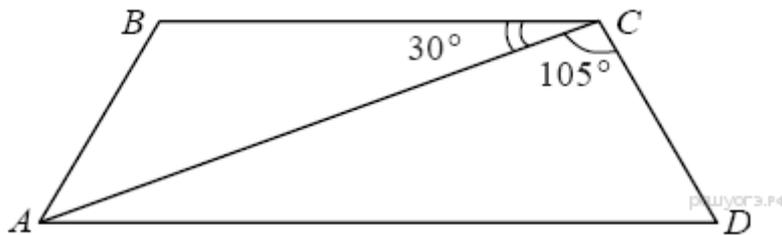


Решение.

Сумма углов треугольника ACD равна 180° , поэтому $D = 70^\circ$. Так как основания трапеции параллельны, углы CAD и BCA равны как накрестлежащие. Так как трапеция равнобедренная, сумма её противоположных углов равна 180° , поэтому $\angle ABC = 180^\circ - \angle D = 110^\circ$.

Ответ: 110.

8. Найдите меньший угол равнобедренной трапеции $ABCD$, если диагональ AC образует с основанием BC и боковой стороной CD углы, равные 30° и 105° соответственно.



Решение.

Поскольку угол C равен 135° , а сумма противоположных углов равнобедренной трапеции равна 180° , угол A равен 45° .

Ответ: 45.

9. Тангенс острого угла прямоугольной трапеции равен $\frac{5}{6}$. Найдите её большее основание, если меньшее основание равно высоте и равно 15.



Решение.

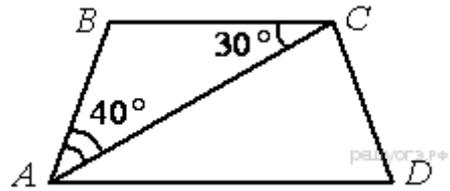
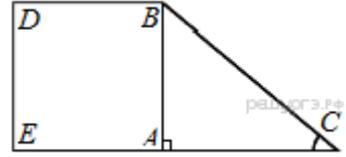
Заметим, что $AB = DB = 15$. Тангенс угла равен отношению противолежащего катета к прилежащему. Следовательно, $AB : AC = 5 : 6$. Тогда

$$AC = \frac{6}{5}AB = \frac{6}{5} \cdot 15 = 18.$$

Поэтому большее основание трапеции равно $DB + AC = 15 + 18 = 33$.

Ответ: 33.

10. Найдите угол ADC равнобедренной трапеции $ABCD$, если диагональ AC образует с основанием BC и боковой стороной AB углы, равные 30° и 40° соответственно.



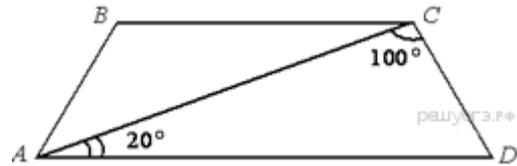
Решение.

Углы BCA и CAD равны как накрест лежащие, то есть $\angle CAD = \angle BCA = 30^\circ$. В равнобедренной трапеции углы при основаниях равны:

$$\angle ADC = \angle BAD = \angle BAC + \angle CAD = 40^\circ + 30^\circ = 70^\circ.$$

Ответ: 70.

11. Найдите угол ABC равнобедренной трапеции $ABCD$, если диагональ AC образует с основанием AD и боковой стороной CD углы, равные 20° и 100° соответственно.



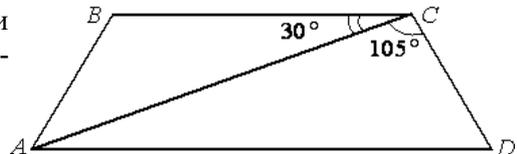
Решение.

Углы BCA и CAD равны как накрест лежащие, то есть $\angle BCA = \angle CAD = 20^\circ$.
В равнобедренной трапеции углы при основании равны:

$$\angle ABC = \angle BCD = \angle BCA + \angle ACD = 20^\circ + 100^\circ = 120^\circ.$$

Ответ: 120.

12. Найдите меньший угол равнобедренной трапеции $ABCD$, если диагональ AC образует с основанием BC и боковой стороной CD углы, равные 30° и 105° соответственно.



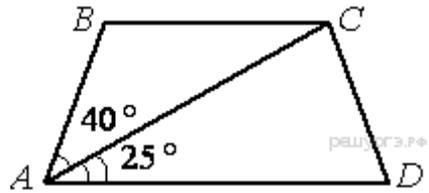
Решение.

В равнобедренной трапеции углы при основаниях равны. Угол BCD — тупой, а угол ADC — острый, значит, $\angle ADC$ — меньший угол равнобедренной трапеции. Углы CAD и BCA равны как накрест лежащие. Тогда:

$$\angle ADC = 180^\circ - \angle DAC - \angle ACD = 180^\circ - 30^\circ - 105^\circ = 45^\circ.$$

Ответ: 45° .

13. Найдите больший угол равнобедренной трапеции $ABCD$, если диагональ AC образует с основанием AD и боковой стороной AB углы, равные 25° и 40° соответственно.



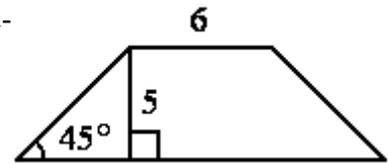
Решение.

В равнобедренной трапеции углы при основаниях равны. Угол ABC — тупой, а угол BAD — острый, значит, $\angle ABC$ — больший угол равнобедренной трапеции. Углы CAD и BCA равны как накрест лежащие. Тогда:

$$\angle ABC = 180^\circ - \angle BAC - \angle BCA = 180^\circ - 40^\circ - 25^\circ = 115^\circ.$$

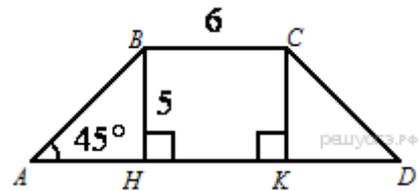
Ответ: 115° .

14. В равнобедренной трапеции известны высота, меньшее основание и угол при основании. Найдите большее основание.



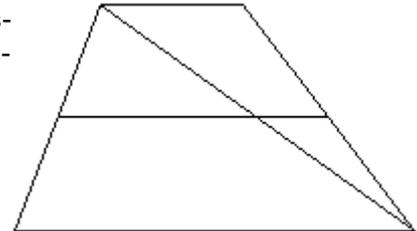
Решение.

Проведём вторую высоту и введём обозначения как показано на рисунке. Треугольник ABH — прямоугольный, угол $ABH = 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$, углы BAH и ABH равны, следовательно, треугольник ABH — равнобедренный, $AH = BH = 5$. В четырёхугольнике $HBCK$ $BC \parallel HK$ и $BH \parallel CK$, следовательно, он параллелограмм. Угол $BHK = 90^\circ$, значит, $HBCK$ — прямоугольник, откуда $BH = CK = 5$ и $BC = HK = 6$. Поскольку трапеция равнобедренная, углы BAH и CDK равны. Треугольники ABH и CDK прямоугольные, $BH = CK$, $\angle BAH = \angle CDK$, следовательно, эти треугольники равны, откуда $AH = KD = 5$. Большее основание трапеции $AD = AH + HK + KD = 5 + 6 + 5 = 16$.



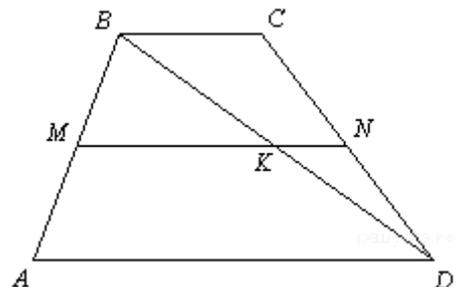
Ответ: 16.

15. Основания трапеции равны 4 и 10. Найдите больший из отрезков, на которые делит среднюю линию этой трапеции одна из её диагоналей.



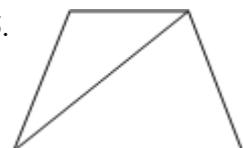
Решение.

Введём обозначения как показано на рисунке. MN — средняя линия, поэтому, $AM = MB$, откуда по теореме Фалеса $BK = KD$. Рассмотрим треугольник ABD MK — средняя линия, следовательно, $MK = \frac{AD}{2} = \frac{10}{2} = 5$.



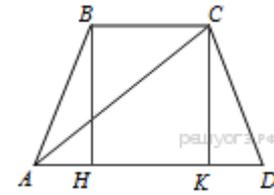
Ответ: 5.

16. Основания равнобедренной трапеции равны 50 и 104, боковая сторона 45. Найдите длину диагонали трапеции.



Решение.

Проведём высоты в трапеции и введём обозначения как показано на рисунке. В четырёхугольнике $HBCK$ $BC \parallel HK$ и $BH \parallel CK$, следовательно, он параллелограмм. Угол $BHK = 90^\circ$, значит, $HBCK$ — прямоугольник, откуда $BH = CK$ и $BC = HK = 50$. Поскольку трапеция равнобедренная, углы BAH и CDK равны. Треугольники ABH и CDK прямоугольные, $BH = CK$, $\angle BAH = \angle CDK$, следовательно, эти треугольники равны, откуда $AH = KD = \frac{AD - BC}{2} = \frac{104 - 50}{2} = 27$. Из треугольника CKD по теореме Пифагора найдём высоту CK :



$$CK = \sqrt{CD^2 - KD^2} = \sqrt{45^2 - 27^2} = \sqrt{3^2(15^2 - 9^2)} = 3 \cdot \sqrt{225 - 81} = 36.$$

Рассмотри треугольник ACK , он прямоугольный, по теореме Пифагора:

$$AC = \sqrt{AK^2 + CK^2} = \sqrt{(AH + HK)^2 + CK^2} = \sqrt{(50 + 27)^2 + 36^2} = 85.$$

Ответ: 85.

17. Около трапеции, один из углов которой равен 49° , описана окружность. Найдите остальные углы трапеции.

Запишите величины углов в ответ через точку с запятой в порядке неубывания.

Решение.

Пусть углы трапеции равны α , β , γ , δ и угол $\alpha = 49^\circ$. Около выпуклого четырёхугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда сумма противоположных углов равна 180° : $\alpha + \gamma = 180^\circ$, откуда $\gamma = 180^\circ - 49^\circ = 131^\circ$. Сумма смежных углов в трапеции равна 180° , следовательно, $\beta = 180^\circ - \alpha = 180^\circ - 49^\circ = 131^\circ$, $\delta = 180^\circ - \gamma = 180^\circ - 131^\circ = 49^\circ$. Тем самым, три неизвестных угла равны 49° , 131° и 131° .

Ответ: 49; 131; 131.

18. В трапецию, сумма длин боковых сторон которой равна 24, вписана окружность. Найдите длину средней линии трапеции.

Решение.

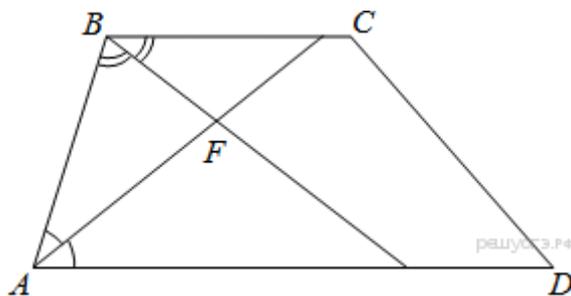
Пусть стороны трапеции равны a , b , c , d . В выпуклый четырёхугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда суммы длин противоположных сторон равны: $a + c = b + d = 24$. Длина средней линии равна полусумме длин оснований: $24/2 = 12$.

Ответ: 12.

19. Биссектрисы углов A и B при боковой стороне AB трапеции $ABCD$ пересекаются в точке F . Найдите AB , если $AF = 24$, $BF = 32$.

Решение.

Введём обозначения как показано на рисунке. Сумма смежных углов трапеции, прилежащих к боковой стороне равна 180° , следовательно:



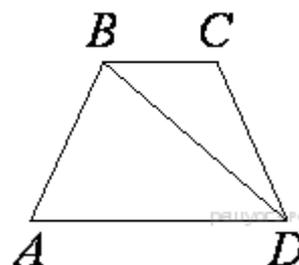
$$2\angle BAF + 2\angle ABF = 180^\circ \Leftrightarrow \angle BAF + \angle ABF = 90^\circ.$$

Рассмотрим треугольник ABF , сумма углов треугольника равна 180° , поэтому $\angle AFB = 180^\circ - \angle BAF - \angle ABF = 90^\circ$, то есть треугольник ABF — прямоугольный. Найдём AB по теореме Пифагора:

$$AB = \sqrt{AF^2 + BF^2} = \sqrt{24^2 + 32^2} = \sqrt{8^2(3^2 + 4^2)} = 8 \cdot \sqrt{25} = 40.$$

Ответ: 40.

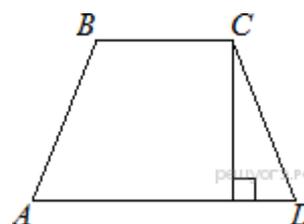
20. В трапеции $ABCD$ $AB = CD$, $\angle BDA = 49^\circ$ и $\angle BDC = 13^\circ$. Найдите угол ABD . Ответ дайте в градусах.

**Решение.**

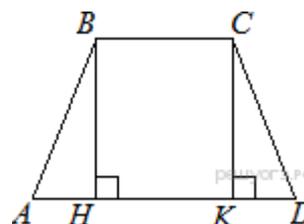
Угол ADC равен $\angle ADC = \angle BDA + \angle BDC = 49^\circ + 13^\circ = 62^\circ$. Трапеция $ABCD$ — равнобедренная, следовательно, углы при основаниях равны, то есть $\angle BAD = \angle ADC = 62^\circ$. Сумма углов треугольника равна 180° , откуда из треугольника ABD получаем, что $\angle ABD = 180^\circ - (\angle BAD + \angle ADB) = 180^\circ - (62^\circ + 49^\circ) = 69^\circ$.

Ответ: 69.

21. Высота равнобедренной трапеции, проведённая из вершины C , делит основание AD на отрезки длиной 1 и 5. Найдите длину основания BC .

**Решение.**

Проведём вторую высоту и введём обозначения как показано на рисунке. Рассмотрим треугольники ABH и CKD , они прямоугольные, AB равно CD , BH равно CK , следовательно, эти треугольники равны, откуда $AH = KD = 1$. Найдём отрезок HK : $HK = AK - AH = 5 - 1 = 4$. Высоты BH и CK перпендикулярны AD , значит, они параллельны, BH равно CK , следовательно, $HBCK$ — прямоугольник, поэтому $BC = HK = 4$.



Ответ: 4.