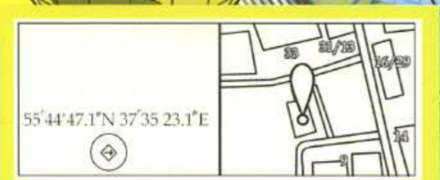
ЕГЭ

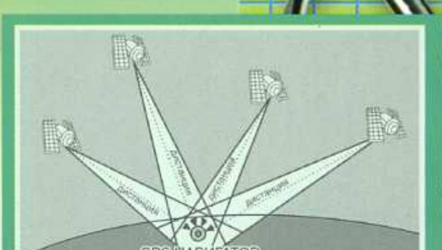
И. Р. ВЫСОЦКИЙ, И. В. ЯЩЕНКО

МАТЕМАТИКА для *нелюбителей*

Подготовка к ЕГЭ

БАЗОВЫЙ УРОВЕНЬ





- Тренировочные задания
- Типовые варианты
- Справочник
- Разбор решений задач
- Очерки о практической математике
- Советы по подготовке к ЕГЭ

ЕДИНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН

И. Р. Высоцкий, И. В. Ященко

МАТЕМАТИКА ДЛЯ НЕЛЮБИТЕЛЕЙ

Подготовка к ЕГЭ

Базовый уровень

Тренировочные задания
Типовые варианты
Справочник
Разбор решений задач
Очерки о практической математике
Советы по подготовке к ЕГЭ

Издательство
«ЭКЗАМЕН»

МОСКВА
2017

УДК 372.8:51
ББК 74.262.21
В93

Высоцкий И. Р.

В93 ЕГЭ. Математика для нелюбителей. Подготовка к ЕГЭ. Базовый уровень / И. Р. Высоцкий, И. В. Ященко. — М. : Издательство «Экзамен», 2017. — 303, [1] с.

ISBN 978-5-377-11816-9

Известно, что математика является источником затруднений для многих школьников. Эта книга — как раз для них. Она состоит из отдельных методических указаний и задач, в которых математика прикладывается к самым обыденным явлениям. Задача авторов не в том, чтобы заставить читателя полюбить математику (а вдруг?), а в том, чтобы показать, что немного математики есть повсюду и что даже самый отъявленный нелюбитель математики все равно ей занимается каждый день. Вторая задача — помочь тем, кто не любит математику, осмыслить наиболее общие математические факты на простых и понятных примерах. Хотя бы для того, чтобы успешно сдать базовый экзамен ЕГЭ по математике. В конце приведены справочник по школьной математике, тренировочные задачи и варианты, составленные в соответствии с требованиями ЕГЭ по математике базового уровня.

Приказом № 699 Министерства образования и науки Российской Федерации учебные пособия издательства «Экзамен» допущены к использованию в общеобразовательных организациях.

УДК 372.8:51
ББК 74.262.21

Подписано в печать 15.12.2016. Формат 60x90/16.
Гарнитура «Школьная». Бумага газетная.
Уч.-изд. л. 10,49. Усл. печ. л. 19. Тираж 5000 экз. Заказ № 11362

ISBN 978-5-377-11816-9

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Что такое математические способности? И что делать, если их нет? Почему одному математика дается легко, а другой в какой-то момент перестает понимать всякие там преобразования? И нужна ли математика в жизни вообще? Если да, то кому? Неужели каждому?

Мы не рассчитываем на то, что эта книга поможет вам полюбить математику — это не наша и не ваша цель. Во-первых, мы хотим, чтобы эта книга помогла вам увидеть простоту и пользу практической математики, которая растворяется и теряется в школьных уроках. Во-вторых, мы думаем, что книжка поможет вам подготовиться к экзамену и благополучно сдать его.

Эта книжка состоит из отдельных очерков и задач, но почти не содержит доказательств и объяснений. В конце есть справочные материалы, небольшие подборки заданий и несколько вариантов ЕГЭ базового уровня. Мы уверены, что главное в изучении математики — задачи, но не стали слишком перегружать ими эту книжку. Задач хватает в других книгах и на сайте открытого банка. Решайте, что понравилось.

Мы знаем, что математика, так или иначе, нужна каждому, но разным людям нужна разная математика. Математики прошлого не знали логарифмов и производных, однако все равно были математиками. Без тригонометрических формул и квадратных уравнений, логарифмов и интегралов прожить можно; очень многие люди живут и здравствуют. Но это не значит, что они не занимаются математической деятельностью. Занимаются — каждый день по многу раз. И это тем более не значит, что логарифмы и синусы нужно выкинуть из школьной программы — они очень нужны, если не вам, то другим людям. С другой стороны, странно и нелепо требовать, чтобы все назубок выучили все предметы. И не менее абсурдно объявлять неучами тех, кто освоил не все, чему учат в школе.

Современный ЕГЭ по математике проверяет не только знание математических фактов и способность решать сложные уравнения и неравенства. Многим выпускникам эти умения не удается развить (мы не обсуждаем, почему это так и хорошо это или плохо). Базовый экзамен прежде всего проверяет умение применять элементарные математические навыки в бытовых ежедневных ситуациях. Главное — здравый смысл.

Бытовая математика нужна нам больше, чем нашим родителям, дедушкам и прадедушкам. Мы живем в мире, где много абстрактной числовой и геометрической информации, которую нужно воспринимать. Более того — ее нужно воспринимать правильно и делать разумные выводы. Бытовая и очень практическая математика встречает нас в магазинах, в банках, в страховых компаниях, на улицах городов, в сводках новостей, в аэропортах и на вокзалах — везде. Часто человек использует математику, даже не догадываясь, что он это делает (у многих математика ассоциируется лишь с преобразованиями и геометрическими теоремами — не так ли?).

К сожалению, школьникам часто говорят — это надо выучить (чтобы сдать экзамен) и забыть... Мы любим математику, и сделали для вас базовый ЕГЭ таким, чтобы можно было честно сказать, что подготовка к экзамену — полезное и интересное занятие. Мы сделали базовый ЕГЭ таким, чтобы можно было сказать — то, что в нем есть, действительно может понадобиться в жизни: знания, навыки или просто интуиция.

Если вы — нелюбитель математики, попробуйте, перевернув эту страницу, начать с чистого листа. И, страница за страницей, вы почувствуете, что у вас начинает получаться...

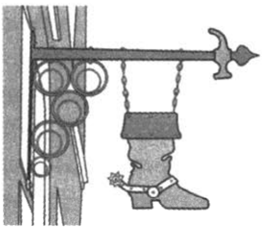
Авторы

ГЛАВА 1. ПРОСТЕЙШИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ В БЫТУ

Нумерация домов и квартир

В Праге на старых улочках местами сохранились вывески с картинками, игравшими роль почтовых адресов. На письме могло значиться: Пану Вачеку, Прага, Малая Сторона, в доме с бубликом. Для почтальона XVIII века достаточно.

Числовая почтовая адресация упростила жизнь, но одновременно потребовала числовой грамотности от всех горожан, а тем более — от почтовых работников.



Человек ходит вокруг дома номер 20 и удивляется, почему дома рядом имеют номера 18 и 22, а нужного ему дома 21 нет. Удивительно, но для него явилось открытием, что дом 21 на другой стороне улицы. Одна сторона улицы четная, другая — нечетная. И все бы хорошо, но этот человек не понимал, как отличить четные от нечетных. Наверняка можно утверждать, что он не работает ни почтальоном, ни водителем, ни участковым полицейским.

Представьте себе, что вы идете по тротуару вдоль городской улицы. Справа от вас дом 8, а слева дом 13. Это значит, что для вас правая сторона — четная, а левая — нечетная. Следующий дом справа будет 10, а слева — 15 (если нумерация не нарушена). Вы идете от начала улицы к ее концу — *по возрастанию* номеров домов.

Задача 1. Представьте себе теперь, что вы развернулись и пошли в обратную сторону. Справа или слева от вас дом 23? Каким должен быть следующий за ним?

Если вы сумели представить себя на этой улице, вообразить некоторое подобие плана и найти ответ, то с математическими способностями у вас все не очень плохо. Если не сумели — потренируйтесь. Способности не даются раз и навсегда — их можно развивать.

В Санкт-Петербурге и некоторых других городах нумерация домов зеркальная. Если правая сторона для вас четная, то за домом 8 будет дом 6 — вы идете от конца улицы к началу — по убыванию нумерации. Если вы привыкли пользоваться нумерацией домов в своем городе, то город с другой нумерацией вас сначала запутает.

Деление с остатком

В жизни деление встречается часто, а деление нацело — редко. Обычно приходится округлять частное до целого в большую или в меньшую сторону в зависимости от обстоятельств. Какие еще «городские задачи» постоянно приходится решать самым разным людям?

Задача 2 (задача разносчика пиццы). У разносчика заказ доставить пиццу по адресу: ул. Удивительная, дом 17, кор. 1, кв. 74. Разносчик подъезжает к 14-этажному дому, в котором один подъезд и табличка на двери: квартиры 1–98.

а) Сколько квартир на каждом этаже?

б) На каком этаже находится нужная квартира?

Решение.

а) 98 : 14 = 7. Значит, на каждом этаже 7 квартир.

б) Последняя квартира на первом этаже имеет номер 7, на втором — 14 и так далее. Можно так считать и дальше, каждый раз прибавляя 7, пока не дойдем до нужных номеров. Но можно применить «продвинутую математику»: разделим 74 на 7 с остатком. Получим частное 10 и в остатке 4. Значит, последняя квартира на 10-м этаже имеет номер 70, а 74-я квартира находится на 11-м этаже.

Ответ: а) 7; б) 11.

Задача 3. Теплоход рассчитан на 130 пассажиров и 40 человек команды. Каждая спасательная шлюпка вмещает 24 человека. Сколько шлюпок должно быть на борту?

Решение.

Всего на борту должно быть не более $130 + 40 = 170$ человек. $170 : 24 = 7$ (остаток 2). Значит, если шлюпок 7, то 2 людям места не найдется. Потребуется 8 шлюпок.

Ответ: 8.

После катастрофы «Титаника» в 1912 году были приняты международные правила, которые требуют, чтобы мест в спасательных шлюпках хватало для всех пассажиров и всех членов команды; эти правила с различными уточнениями действуют по сей день.

Задача 4. Больному прописано лекарство — по 2 таблетки три раза в день на протяжении семи дней. В упаковке 15 таблеток. Сколько упаковок нужно купить, чтобы таблеток хватило на весь курс?

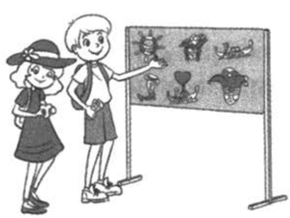
Решение.

На весь курс нужно $2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$ таблетки. $42 : 15 = 2$ (остаток 12). Значит, двух упаковок не хватит. Нужно три упаковки.

Ответ: 3.

В задачах 2–4 после деления приходилось округлять частное до большего целого числа — как говорят, с избытком. В других случаях приходится брать частное с недостатком.

Задача 5. У туриста перед вылетом из Венеции осталось 20 евро. Турист хочет потратить их в аэропорту на сувениры — хочет купить друзьям одинаковые магниты с видами города по 1,7 евро за штуку. Какое (наибольшее) количество магнитов он сможет купить на эти деньги?



Решение. $\frac{20}{1{,}7} = \frac{200}{17} = 11\frac{13}{17}$. Частное больше 11, но меньше 12. Значит, на 12 магнитов денег не хватит, но 11 купить можно.

Задачу можно решать иначе с помощью грубой начальной прикидки. 10 магнитов будут стоить 17 евро и останется 3 евро. Можно купить еще один магнит и останется $3 - 1{,}7 = 1{,}3$ евро. На двенадцатый такой же магнит не хватит (если, конечно, не удастся получить скидку у продавца).

Ответ: 11.

Прикидки — грубые, но полезные

С прикидкой мы встретились в задаче 5, но там прикидка нужна как первый шаг решения. Чаще прикидка позволяет перед точным решением быстро получить правдоподобное значение. Тогда, даже если потом случится ошибка, ее легко будет заметить и исправить.

Задача 6. В самолете информационная система, встроенная в спинку впередистоящего кресла, сообщает пассажиру, что высота полета 37 000 футов. В одном футе 30,5 сантиметров. Нужно выразить высоту полета в метрах.

Решение. Сначала прикидка — в трех футах около метра (несколько меньше). Значит, в 36 тыс. футов (недалеко от 37 000 и удобно делить на 3) около 12 тыс. метров. Точный результат не должен быть далек от этого.
Теперь аккуратное решение: 30,5 см = 0,305 м;

$$37\,000 \cdot 0{,}305 = 37 \cdot 305 = 37 \cdot 300 + 37 \cdot 5 = \\ = 11\,100 + 185 = 11\,285 \text{ (м)}.$$

Ответ: 11 285.

Получилось около 11 километров. Это правдоподобно.

Почти 20 из каждых 100 участников ЕГЭ 2014 года не смогли решить эту задачу. Получив верные цифры, они ошиблись в порядке и послали самолет в космос, заявив, что высота полета около ста или тысячи километров. Обидно, что они не заметили нелепость результата. Получается, что считать они более-менее умеют, но не понимают, что такое метр или на какой высоте летают самолеты. А может

быть, просто некритически относятся к собственным расчетам — вышло что-то, и ладно.

Часто приходится, как в задаче 6, умножать числа на 5. Вместо того, чтобы умножать на 5, удобно разделить на 2 и умножить на 10. Например,

$$38 \cdot 5 = 38 : 2 = 19. \text{ Теперь: } 19 \cdot 10 = 190.$$

Эта маленькая хитрость часто помогает.

Задача 7. Таксист за месяц проехал 6000 км. Цена бензина 35 рублей 50 копеек за литр. Средний расход бензина на 100 км составляет 9 литров. Сколько рублей потратил таксист на бензин за этот месяц?

Решение. Прикидка. Если бы расход был 10 литров, а литр бензина стоил бы ровно 30 рублей, то на 100 км потребовалось бы бензина на 300 рублей, а на 6000 км — в 60 раз больше, то есть 18 000 рублей.

Точное решение. $9 \cdot 35{,}5 = 270 + 45 + 4{,}5 = 319{,}5$ — стоимость бензина на 100 км пробега. Значит, на 6000 км расходы составят $319{,}5 \cdot 60 = 3195 \cdot 6 = 19\,170$.

Ответ: 19 170.

Задача 8. Курс австралийского доллара (AUD) примерно 0,94 доллара США (USD) (на 17.06.2014). Обменный пункт в аэропорту покупает AUD за 0,92 USD, а продает — за 0,96 USD.

а) Какую сумму (в USD) получит турист, решивший продать 1500 AUD?

б) Какую сумму (в AUD) получит турист, решивший обменять 800 USD?

Решение.

а) Австралийский доллар стоит дешевле американского. Значит, при обмене должно получиться меньше, чем 1500 USD. Теперь точно: $1500 \cdot 0{,}92 = 1380$.

б) Американский доллар стоит дороже австралийского. Значит, при обмене турист должен получить больше, чем 800 AUD. А именно:

$$800 : 0{,}96 = 80\,000 : 96 = 2500 : 3 = 833\frac{1}{3}.$$

Ответ: а) 1380; б) 833 австралийских доллара и 33 цента.

Иногда мелкие мошенники встречаются даже среди банковских служащих. Известны случаи, когда, пользуясь тем, что австралийский доллар и доллар США близки и что немногие люди могут сделать прикидку, обманщик считает «не в ту сторону». Доверчивый турист дает 1000 USD и должен получить $1000 : 0{,}96 = 1041{,}67$ австралийских доллара. А вместо этого получает только $1000 \cdot 0{,}96 = 960$. Математика так не обманешь — он не будет считать точно, но прикидывает и понимает, что должен получить больше тысячи, а не меньше.

Опыт экзаменов в последние годы показывает, что многие выпускники школы крайне легкомысленно относятся к вычислениям при решении даже очень простых задач. Мы уже приводили пример — задачу 6 про высоту полета самолета многие решили неверно. Не потому, что совсем не умели считать, а потому, что не думали над правдоподобностью результата.

По этой причине в банке заданий ЕГЭ появились задачи, которые учат именно этому — осмысленно подходить к числовым значениям величин, опираясь на правдоподобность и здравый смысл.

Задача 9. Установите соответствие между величинами и их значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ	ЗНАЧЕНИЯ
А) рост жирафа	1) 6400 км
Б) толщина лезвия бритвы	2) 500 см
В) радиус Земли	3) 0,08 мм
Г) ширина футбольного поля	4) 68 м

Запишите в таблицу выбранные цифры под соответствующими буквами.

Ответ:

А	Б	В	Г

Замечание. Главное — не запутаться в единицах измерения, а еще — составляя табличку ответов. Перед тем как выписать последовательность ответов, удобно подписать соответствующие цифры в левом столбце:

А) рост жирафа — 500 см — 2).

Тогда останется только механически перенести цифры в таблицу, уже не разыскивая подходящие значения.

Оптимальный выбор

Прикидки помогают решать вполне бытовые задачи. Рассмотрим одну из задач открытого банка ЕГЭ.

Задача 10. Для транспортировки 42 тонн груза на 1200 км можно воспользоваться услугами одной из трех фирм-перевозчиков. Стоимость перевозки и грузоподъемность автомобилей каждого перевозчика указаны в таблице.

Перевозчик	Стоимость перевозки одним автомобилем (руб. на 100 км)	Грузоподъемность одного автомобиля (тонны)
А	3100	4
Б	4000	5,5
В	7600	10

Сколько рублей придется заплатить за самую дешевую перевозку?

Решение. Самое простое решение — в лоб посчитать все суммы. Давайте попробуем сначала отобрать самый дешевый вариант, а затем уже вычислим точно сумму.

Нас пока не интересует расстояние. Будем считать на 1 км. Важно знать число грузовиков, которые потребуются (грузоподъемность превышать нельзя — это такое правило, которое в жизни иногда не выполняется).

Перевозчик А должен предоставить 11 автомобилей (или рейсов), поскольку $10<\frac{42}{4}<11$. Перевозчик Б может перевезти груз 8 машинами. Если пользоваться услугами В, потребуется 5 машин. Значит, нужно сравнить числа

$$31 \cdot 11,\ 40 \cdot 8 \text{ и } 76 \cdot 5.$$

Второе число равно 320. Первое число заведомо больше, чем $30 \cdot 11 = 330$, а третье число больше, чем $70 \cdot 5 = 350$. Наименьшую сумму на километр придется заплатить компании Б. Воспользуемся ее услугами. Известно, что на километр оплата составит $40 \cdot 8 = 320$ рублей, значит, за перевозку всего груза на 1200 км потребуется заплатить $320 \cdot 1200 = 384\,000$ рублей.

Ответ: 384 000.

Задача 11. Для группы иностранных гостей требуется купить 12 путеводителей. Нужные путеводители нашлись в трех интернет-магазинах. Цена путеводителя и условия доставки всей покупки приведены в таблице.

Интернет-магазин	Цена путеводителя (руб. за шт.)	Стоимость доставки (руб.)	Дополнительные условия
А	280	250	Нет
Б	270	350	Доставка бесплатная, если сумма заказа превышает 3600 руб.
В	300	250	Доставка бесплатная, если сумма заказа превышает 3500 руб.

Во сколько рублей обойдется наиболее дешевый вариант покупки с доставкой?

Решение. Сравним А и Б. Выбрав А, мы выигрываем по сравнению с Б на доставке 100 рублей, а проигрываем в цене $12 \cdot 10 = 120$ рублей. Значит, вариант Б более выгоден, чем вариант А.

Осталось сравнить Б и В. Выбрав В, мы проигрываем $12 \cdot 30 = 360$ рублей на самих путеводителях, что больше выигрыша в стоимости доставки, даже если доставка бесплатная (вроде так оно и есть). Значит, вариант Б самый выгодный. Общие затраты составят $270 \cdot 12 + 350 = 3590$ рублей.

Ответ: 3590.

Здесь мы опять обошлись минимумом вычислений, использовав первоначальную прикидку для выбора оптимального варианта.

Иногда, конечно, так не получается. Тогда приходится все честно считать. Для счета лучше использовать таблицу, дописав к ней недостающие столбцы.

Задача 12. В трех салонах сотовой связи один и тот же смартфон продается в кредит на разных условиях. Условия приведены в таблице.

Салон	Цена смартфона (руб.)	Первоначальный взнос (в % от цены)	Срок кредита (мес.)	Сумма ежемесячного платежа (руб.)
Эпсилон	8100	30	6	1440
Дельта	8200	10	12	840
Омикрон	9600	15	12	800

Определите, в каком из салонов покупка обойдется дешевле всего (с учетом переплаты). В ответ запишите эту сумму в рублях.

Решение. «Расширим» таблицу:

Салон	Цена	Взнос (%)	Сумма первого взноса	Срок (мес.)	Сумма ежем. платежа	Уплачено в рассрочку	Всего
Эпсилон	8100	30	$8100 \cdot 0{,}3 = 2430$	6	1440	$1440 \cdot 6 = 8640$	$2430 + 8640 = 11\,070$
Дельта	8200	10	820	12	840	10 080	10 900
Омикрон	9600	15	1440	12	800	9600	11 040

Салон «Дельта» предлагает наиболее дешевый вариант.

Ответ: 10 900.

Перевод единиц длины и массы

Перевод одних единиц в другие приходится делать часто. Хотя бы потому, что в разных странах приняты разные системы измерения величин. Сейчас в России мы пользуемся метрической системой мер, измеряя расстояния в метрах и километрах, вес — в килограммах. В Англии, США и некоторых других странах пользуются футами, ярдами и милями для расстояний и фунтами для измерения массы или веса.

Когда фантастический роман Жюля Верна «20 000 лье под водой» переводили на русский язык, переводчик посчитал, что в одном лье 4 версты или 4 километра (разница между верстой и километром невелика). Получился роман «80 000 километров под водой». Вероятно, переводчик использовал почтовое лье (3898 м). Жюль Верн наверняка имел в виду морское лье, равное 5556 м. Русское название должно было бы быть «111 120 километров под водой». Впрочем, переводчику ошибку можно простить, а читатели даже не замечают, что у них «украли» больше 30 тысяч километров приключений.

Для решения задач мы дадим небольшие таблички для преобразования некоторых мер длины и веса. Мы дадим и ныне употребительные, и вышедшие из употребления, но встречающиеся в литературе. Преобразование этих единиц упрощается тем, что у них «общий ноль». То есть, если расстояние нулевое, то оно нулевое, в чем его не измеряй. Если что-нибудь ничего не весит, то оно ничего не весит ни в килограммах, ни в фунтах.

Табл. 1 Соответствие некоторых мер длины (прибл.)

1 сухопутная миля = 1609 м	1 дюйм = 2,54 см = 25,4 мм
1 морская миля = 1852 м	1 фут = 12 дюймов = 30,5 см
1 верста = 1067 м = 1,067 км	1 ярд = 3 фута = 36 дюймов
1 аршин = 28 дюймов = = 71,12 см	1 линия = 0,1 дюйма = 2,54 мм
1 сажень = 3 аршина	1 типографский пункт = = 0,3759 мм
	1 компьют. пункт = 1/72 дюйма = = 0,3527 мм

Табл. 2 Соответствие некоторых мер массы (прибл.)

1 унция = 28,35 г 1 англ. фунт = 16 унций 1 стоун = 14 фунтов	1 рус. фунт = 409,5 г 1 пуд = 40 рус. фунтов = = 16,38 кг 1 карат (ювел.) = 200 мг = 0,2 г

Перевод одних единиц в другие — процесс обратимый. Можно перевести футы в метры, а потом метры в футы. Например, рост мальчика может быть 4 фута 5 дюймов. Это составляет $4 \cdot 30{,}5$ см $+ 5 \cdot 2{,}54$ см $= 134{,}7$ см. Мы бы сказали 1 м 35 см. Переведем обратно в футы и дюймы. Лучше сначала выразить в сантиметрах: 135 см : $2{,}54 \approx$ $\approx 53{,}15$ дюйма, то есть 4 фута и 5,15 дюйма. Неточность возникает из-за округлений, но в бытовых вычислениях округления необходимы, а на небольшие погрешности не следует обращать внимания. Снова получилось 4 фута и 5 дюймов.

Задача 13. На сколько граммов отличается английский фунт от русского?

Решение. В одном английском фунте 16 унций, то есть $16 \cdot 28{,}35 = 453{,}6$ г. Следовательно, английский фунт тяжелее русского на $453{,}6 - 409{,}5 = 44{,}1$ г.

Ответ: 44,1.

Задача 14. В детективном рассказе Рекса Стаута «Требуется мужчина» сыщик Ниро Вульф дает объявление в газете «Стар»:

«ТРЕБУЕТСЯ МУЖЧИНА весом 260–270 фунтов, ростом около 5 футов 11 дюймов, 45–55 лет, европеоидной наружности, талия не больше 48 дюймов, способный вести активный образ жизни».

Переведите это объявление в метрическую систему мер (округляя до целых при необходимости).

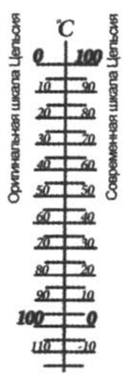
Ответ: «ТРЕБУЕТСЯ МУЖЧИНА весом 118–122 кг, ростом около 180 см, 45–55 лет, европеоидной наружности, талия не больше 122 см, способный вести активный образ жизни».

Винтовка Мосина образца 1891 года использовалась вплоть до конца Великой Отечественной войны. Чаще винтовку Мосина называли трехлинейкой, потому что калибр ствола винтовки ровно три линии, то есть 7,62 мм.

Перевод единиц температуры

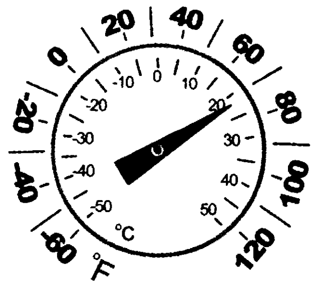
В Европе, Азии, Австралии и Африке люди измеряют температуру преимущественно в *градусах Цельсия*. За 0 °C принимают температуру замерзания воды, а за 100 °C — температуру кипения воды. Нужно добавить, что вода должна быть абсолютно без примесей (и лед тоже), давление должно быть нормальным и все это нужно наблюдать на уровне моря. Даже небольшие колебания давления приводят к тому, что чайник закипает то при 98 °C, то при 101 °C, но нас это нисколько не смущает.

На самом деле швед Андерс Цельсий (XVIII в.) предложил совсем другую шкалу — за 100 градусов он взял температуру замерзания воды, а за 0 — точку кипения. Но неблагодарные современники ничего не поняли и сразу после смерти Цельсия все испортили, развернув шкалу задом наперед.



В США, в Белизе, на Бермудских островах и на Ямайке до сих пор используется *шкала Фаренгейта*. Немецкий ученый Габриэль Фаренгейт предложил шкалу температур (обозначение градуса Фаренгейта °F), согласно которой вода замерзает при +32°, а кипит при +212°. Нормальная температура тела человека получается +96 °F.

Из-за употребительности обеих шкал на многие бытовые термометры наносят сразу обе.



Помимо Цельсия и Фаренгейта температурные шкалы предлагали многие ученые, включая Ньютона. И каждый из них руководствовался глубокими соображениями. Но только шкала Цельсия стала популярной во всем мире. Вероятно, потому, что числа 0 и 100 легко запомнить.

Формула для перевода градусов Цельсия в градусы Фаренгейта:

$$t_F = 1{,}8t_C + 32.$$

Обратите внимание: в отличие от преобразования единиц массы и длины, преобразование градусов Фаренгейта в градусы Цельсия требует не только умножения, но и сдвига.

Третья температурная шкала, которой мы иногда пользуемся, правда, не в быту, — *шкала Кельвина*. Английский физик Уильям Томсон (лорд Кельвин) предложил эту шкалу сугубо для научных целей. Не говорят «градус Кельвина». Говорят просто — «Кельвин» и обозначают К.

Формула для перевода градусов Цельсия в Кельвины:

$$t_K = t_C + 273{,}15.$$

Задача 15. Напишите формулу для перевода градусов Фаренгейта в градусы Цельсия.

Решение. Нужно выразить t_C из формулы $t_F = 1{,}8t_C + 32$. Получим:

$$t_C = \frac{5}{9}(t_F - 32).$$

Ответ: $t_C = \frac{5}{9}(t_F - 32)$.

Задача 16. Какая температура выражается одним и тем же числом градусов и в шкале Цельсия, и в шкале Фаренгейта?

Решение. Обозначим одинаковое число градусов X и подставим в формулу перевода вместо t_C и t_F:

$$X = 1{,}8X + 32;\ 0{,}8X = -32;\ X = -40.$$

Ответ: -40 °C $= -40$ °F.

Задача 17. Как понять фразу: «Июнь в Чикаго выдался не жарким — днем температура не доходила и до 72 градусов»? Действительно ли в Чикаго было не жарко?

Задача 18. Какая единица измерения крупнее — градус Цельсия или градус Фаренгейта?

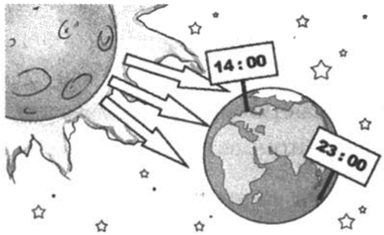
Решение. Чтобы вскипятить ледяную воду, ее нужно нагреть от 0 °C до 100 °C, то есть на 100 °C или, что то же самое, на 212 °F − 32 °F = 180 °F. То есть в 100 градусах Цельсия «помещается» 180 градусов Фаренгейта. Градус Цельсия крупнее.

Ответ: Градус Цельсия крупнее.

Задача 19. Знаменитая антиутопия Рэя Брэдбери называется «451 градус по Фаренгейту». Считается (мы не проверяли), что такова температура горения бумаги. Выразите эту температуру в градусах Цельсия. Округлите до целого.

Разница во времени и часовые пояса

Наша Земля круглая и вращается под лучами Солнца, делая один оборот примерно за 24 часа. Поэтому в разных точках земного шара разное время. По общему соглашению за точку отсчета принимают Гринвичский меридиан — он проходит через место, где раньше располагалась обсерватория английского города Гринвич. Аббревиатурой UTC (Coordinated Universal Time) обозначают точное время, отсчитываемое от того самого меридиана.



Раньше использовалось время GMT (Greenwich Mean Time). Но с развитием точных приборов GMT устарело — оно не учитывает колебаний земной оси, неравномерности ее вращения и т.п. Поэтому пришлось придумать UTC. Люди, не имеющие точных приборов, разницы не чувствуют. Поэтому аббревиатура GMT до сих пор используется. А королевская обсерватория в Гринвиче в середине XX века переехала. Но не менять же из-за этого начальный меридиан.

Таким образом, UTC 0 — это время, которое в Гринвиче и во всей Англии. В России принято в качестве основного московское время MSK. Зимой московское время отличается от гринвичского на 3 часа. Можно записать: MSK = UTC+3.

Летом отличие составляет 2 часа, поскольку англичане переводят в апреле часы на час вперед, а в октябре на час назад.

Очень неудобно было бы, если бы в каждом городе, в каждом районе или в каждой квартире было свое, пусть даже самое точное, время. Поэтому установленные границы часовых поясов не идут вдоль меридианов. Местное время — условное; оно связано с административными границами и сложившейся традицией. Время, по которому мы живем, и местное астрономическое время могут сильно отличаться.

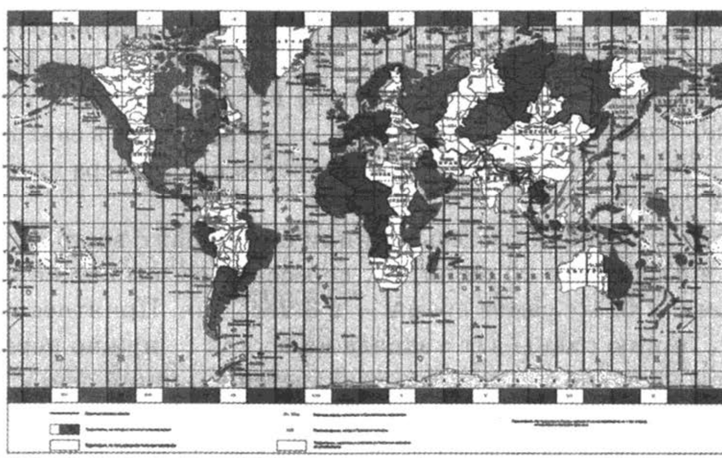
Правительства многих, иногда даже крупных стран вводят на всей территории страны одно и то же время. Например, во всем Китае время опережает гринвичское на 6 часов — китайское время можно записать UTC+8. С одной стороны, это удобно, а с другой — не очень. Например, зимой в Харбине (восток Китая) школьники идут на уроки, когда уже давно рассвело, а в западной провинции Урумчи их сверстники бредут во тьме ночной.

Интересно поступили власти Индии, которые почему-то решили, что время в Индии должно отличаться от гринвичского не на целое число часов. Так что в Индии время UTC+5,5, то есть когда в Лондоне полдень, в Индии 5 часов 30 минут вечера. Есть легенда, что это идет от времен английской колонизации. Если англичанин переворачивает свои английские часы вверх ногами, то он видит на них индийское время.

В России даже не было попыток уравнять время. Всего в России 11 часовых зон от MSK−1 в Калининградской области до MSK+9 на Камчатке*.

Учитывать разницу во времени приходится часто. Между Москвой и Владивостоком, например, разница 7 часов. Если футбольный матч закончился в 8 вечера по Москве, и вы хотите поделиться впечатлениями с другом, живущим во Владивостоке, не звоните ему тотчас же — скорее всего, он будет не слишком рад вашему звонку.

Кстати, по этой причине для России приходится делать много разных вариантов ЕГЭ — для Дальнего Востока одни варианты, для Сибири — другие (но похожие) и т.д. Иначе пришлось бы проводить экзамен во всей стране одновременно, но это невозможно — 11 часовых зон.



* На момент написания книги — сентябрь 2016 года.

Задача 20. Когда в Москве полдень, в Якутске шесть часов вечера. Сколько времени в Москве, когда в Якутске 2 часа дня?

Чем восточнее, тем позже. Чем западнее — тем раньше. Можно вообразить «машину времени» — вдруг, если быстро-быстро лететь на запад, то можно оказаться сначала во вчера, потом — в позавчера и т.д.

Задача 21. Можно ли оказаться во вчера, если быстро лететь на запад?

Например, рейсовый самолет летит от Уфы до Казани 1 час 20 минут. Хотя Татарстан и Башкортостан соседствуют, время в них отличается на 2 часа. Если вылететь из Уфы в 00.20, то прилететь в Казань можно в 23.40 за двадцать минут до полуночи. К сожалению, такого ночного рейса пока нет.

Героиня фильма «Елки», неудачно встретив Новый год в Уфе (MSK+2), на попутной пожарной машине едет в Бавлы — ближайший город Татарстана и оказывается в MSK0, где снова встречает Новый год и загадывает нужное желание, правда, тоже неудачно.

Задача 22. Можно ли таким же способом оказаться в позавчера?

Если лететь на запад, то время приходится переводить назад. Можно попасть во вчера. Но Земля круглая, и в какой-то момент вы пересечете линию смены дат (ее провели в Тихом океане, чтобы никому не мешала), снова прыгнете в завтра, то есть, в смысле, в сегодня. Увы — попасть в позавчера из вчера вам не удастся.

Если вы приближаетесь к линии смены дат с востока, скажем, в 3 часа дня 20 июня, то, пересекая ее, вы окажетесь в 21 июня, в то же самое время — в 3 часа дня. Приятнее пересекать линию смены дат с запада на восток — нужно перевести часы на сутки назад: у вас появляется «лишний день». Так произошло с Филеасом Фоггом и его слугой Паспарту в романе Жюля Верна «Вокруг света за 80 дней». Фогг забыл о линии смены дат и приехал в Лондон после кругосветного путешествия на сутки раньше, чем он думал.

В отличие от Филеаса Фогга матросы первой кругосветной экспедиции Магеллана плыли с востока на запад. При этом они аккуратно вели календарь. Вернувшись в Испанию, они считали, что на дворе 5 сентября 1522 года, а на самом деле было уже 6 сентября. Линия смены дат еще не была придумана, но сама смена дат уже играла с путешественниками свои шутки.

Во всех аэропортах время местное. На всех железных дорогах России время московское. Это нужно учитывать, изучая расписания и строя планы поездок. Например, прилетев в Новосибирск в 16.45, вы можете успеть на омский поезд, отправляющийся в 15.00.

Задача 23. Поезд 13 выходит из Самары в 13 часов 50 минут и прибывает в Москву в 6 часов 20 минут следующих суток. Сколько часов находится в пути поезд?

Решение. Мы знаем, что на всех железных дорогах время московское. Поэтому разницы во времени нет. От 13.50 до полуночи 10 часов 10 минут. Добавляя 6 часов 20 минут, получаем 16 часов 30 минут.

Ответ: 16,5.

Задача 24. Самолет вылетает из Якутска в 23.00 и садится в Москве в полночь. Найдите продолжительность полета.

Решение. Мы знаем, что в расписании самолетов время всегда местное. Поэтому нужно учитывать разницу во времени. Между Москвой и Якутском разница 6 часов. Якутск восточнее Москвы, поэтому, когда в Москве полночь, в Якутске уже 6 утра. Значит, самолет летит 7 часов.

Ответ: 7 часов.

Задачи к главе 1

Задача 25. В доме, в котором живет Петя, один подъезд. На каждом этаже по пять квартир. Петя живет в квартире № 49. На каком этаже живет Петя?

Задача 26. В доме, в котором живет Нина, 5 этажей и несколько подъездов. На каждом этаже находится по 5 квартир. Нина живет в квартире № 51. В каком подъезде живет Нина?

Задача 27. В летнем лагере 165 детей и 23 воспитателя. Автобус рассчитан не более чем на 44 пассажира. Какое наименьшее количество автобусов понадобится, чтобы за один раз перевезти всех из лагеря в город?

Задача 28. Стоимость проездного билета на месяц составляет 755 рублей, а стоимость билета на одну поездку — 20 рублей. Аня купила проездной и сделала за месяц 41 поездку. На сколько рублей больше она бы потратила, если бы покупала билеты на одну поездку?

Задача 29. В мужском общежитии института в каждой комнате можно поселить не более трех человек. Какое наименьшее количество комнат нужно для поселения 59 иногородних студентов?

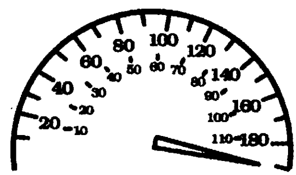
Задача 30. На бензоколонке один литр бензина стоит 32 руб. 20 коп. Водитель залил в бак 10 литров бензина и взял бутылку воды за 21 рубль. Сколько рублей сдачи он получит с 1000 рублей?

Задача 31. Больному прописано лекарство, которое нужно принимать по 0,25 г 4 раза в день в течение 14 дней. В одной упаковке 20 таблеток лекарства по 0,25 г. Какого наименьшего количества упаковок хватит на весь курс лечения?

Задача 32. Перевести температуру из шкалы Фаренгейта в шкалу Цельсия позволяет формула $t_C = \frac{5}{9}(t_F - 32)$, где t_C — температура в градусах по шкале Цельсия, t_F — температура в градусах по шкале Фаренгейта. Скольким градусам по шкале Цельсия соответствует 149 градусов по шкале Фаренгейта?

Задача 33. Чтобы перевести температуру из шкалы Цельсия в шкалу Фаренгейта, пользуются формулой $t_F = 1{,}8t_C + 32$, где t_C — температура в градусах по шкале Цельсия, t_F — температура в градусах по шкале Фаренгейта. Скольким градусам по шкале Фаренгейта соответствует 25 градусов по шкале Цельсия?

Задача 34. Павел Иванович купил американский автомобиль, спидометр которого показывает скорость в милях в час. Какова скорость автомобиля в километрах в час, если спидометр показывает 68 миль в час? Считайте, что 1 миля равна 1609 м. Ответ округлите до целого числа.



Задача 35. Поезд Архангельск–Москва отправляется в 19.36, а прибывает в 16.36 на следующий день (время московское). Сколько часов поезд находится в пути?

Задача 36. Установите соответствие между величинами и их значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ	ЗНАЧЕНИЯ
А) объем банки кетчупа	1) 45 $м^3$
Б) объем воды в озере Мичиган	2) 0,4 л
В) объем спальной комнаты	3) 94 л
Г) объем картонной коробки из-под телевизора	4) 4918 $км^3$

В таблице под каждой буквой, соответствующей величине, укажите номер ее возможного значения.

Ответ:

А	Б	В	Г

Задача 37. Установите соответствие между величинами и их значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ	ЗНАЧЕНИЯ
А) масса футбольного мяча	1) 18 кг
Б) масса дождевой капли	2) 2,8 т
В) масса взрослого бегемота	3) 20 мг
Г) масса стиральной машины	4) 750 г

В таблице под каждой буквой, соответствующей величине, укажите номер ее возможного значения.

Ответ:

А	Б	В	Г

Задача 38. Строительный подрядчик планирует купить 10 тонн облицовочного кирпича у одного из трех поставщиков. Один кирпич весит 5 кг. Цена кирпича и условия доставки всей покупки приведены в таблице.

Поставщик	Цена кирпича (руб. за шт.)	Стоимость доставки (руб.)	Специальные условия
А	51	8000	Нет
Б	52	7000	Доставка бесплатно, если сумма заказа превышает 100 000 руб.
В	56	5000	Доставка со скидкой 50%, если сумма заказа превышает 125 000 руб.

Во сколько рублей обойдется наиболее дешевый вариант покупки с доставкой?

Задача 39. В первом банке одну турецкую лиру можно купить за 20,3 рубля. Во втором банке 110 лир — за 2244 рубля. В третьем банке 35 лир стоят 717,5 рубля. Какую наименьшую сумму (в рублях) нужно заплатить за 20 турецких лир?

Задача 40. Для поездки длительностью 40 минут требуется заказать такси в одной из трех фирм. В таблице приведены тарифы этих фирм.

Фирма такси	Подача машины	Продолжительность и стоимость минимальной поездки	Стоимость 1 минуты сверх продолжительности минимальной поездки
А	300 руб.	Нет	12 руб.
Б	Бесплатно	20 мин. — 400 руб.	18 руб.
В	150 руб.	15 мин. — 225 руб.	15 руб.

Сколько рублей будет стоить самый дешевый заказ?

Задача 41. Телефонная компания предоставляет на выбор три тарифных плана.

Тарифный план	Абонентская плата (в месяц)	Плата за 1 минуту разговора
«Повременный»	Нет	0,4 руб.
«Комбинированный»	160 руб. за 400 мин.	0,3 руб. (сверх 400 мин. в месяц)
«Безлимитный»	285 руб. в месяц	Нет

Абонент предполагает, что общая длительность разговоров составит 600 минут в месяц, и исходя из этого выбирает наиболее дешевый тарифный план. Сколько рублей должен будет заплатить абонент за месяц, если общая длительность разговоров действительно будет равна 600 минутам?

ГЛАВА 2. ДРОБИ, ДОЛИ И ПРОЦЕНТЫ

Обыкновенные и десятичные дроби

Обыкновенная дробь — отношение двух целых чисел (при этом на ноль делить нельзя). Всегда можно сделать так, чтобы знаменатель был числом натуральным, то есть целым положительным, но при работе с дробями это не очень важно.

Если числитель и знаменатель дроби делятся на одно и то же натуральное число (большее 1), то дробь можно сократить. Получается другая дробь с тем же значением. Например,

$$\frac{14}{18}=\frac{7\cdot 2}{9\cdot 2}=\frac{7}{9}.$$

Дроби $\frac{14}{18}$ и $\frac{7}{9}$ — вроде бы и разные, но равны одному и тому же числу. Поэтому учебники часто делают различия между дробями и дробными числами, мол, дробные числа — это такие числа, которые можно записать дробью. На практике учитывать такие тонкости не приходится.

Дробь, дробное число, рациональное число — по сути дела, все это синонимы.

Если дробь не удается сократить, ее называют несократимой.

Встречаются смешанные дроби, например $2\frac{3}{4}$. Но смешанную дробь всегда можно сделать обыкновенной по известному правилу. Например: $2\frac{3}{4}=\frac{2\cdot 4+3}{4}=\frac{11}{4}$. Так что специальный разговор о смешанных дробях не нужен. В жизни смешанные дроби встречаются нечасто.

Математики предпочитают не выделять целую часть, поскольку смешанные дроби неудобны в вычислениях. Кроме того, математики совершенно не понимают, почему дроби, у которых числитель больше знаменателя, называют неправильными. Что в них неправильного?

Но все же смешанные дроби в жизни встречаются. Например, в рецептах можно встретить фразу «возьмите $1\frac{1}{2}$ стакана муки...».

У дробей есть серьезный недостаток — не всякое число можно представить в виде дроби.

Хрестоматийные примеры: число $\sqrt{2}$ и число π не удается записать дробями. Это не рациональные числа. Они иррациональны.

Десятичная дробь — дробь, в знаменателе которой степень числа десять. Десятичные дроби удобны в расчетах, поскольку мы пользуемся десятичной системой счисления. Для них используют специальную краткую запись, позволяющую работать с десятичными дробями так же легко, как и с целыми числами. Например, десятичную дробь $\frac{154}{100}$ записывают 1,54.

У десятичных дробей также есть недостаток — не всякую обыкновенную дробь можно перевести в десятичную. Дело в том, что знаменатель десятичной дроби, как мы говорили, — степень числа 10. А число 10 равно произведению двух простых чисел 2 и 5. Значит, если у какой-нибудь несократимой дроби знаменатель делится на 3, на 7, на 11 или любое другое простое число, кроме 2 и 5, то такую дробь записать в виде десятичной дроби не удается.

Вернее, удается, но получается уже не обычная, а *бесконечная десятичная дробь* с бесконечным числом знаков после запятой — возникает так называемый период.

Задача 42. Можно ли записать конечной десятичной дробью:

а) $\frac{15}{39}$; б) $\frac{12}{15}$; в) $\frac{1327}{512}$?

Решение.

а) Сократим дробь: $\frac{15}{39}=\frac{5}{13}$. Знаменатель делится на простое число 13. Конечной дробью представить не удается.

Бесконечной — удается:

$$\frac{5}{13}=0{,}384615384615\ldots=0{,}(384615).$$

Повторяющийся период показан в скобках.

б) $\frac{12}{15}=\frac{4}{5}$. Знаменатель делится только на 5. Записать конечной десятичной дробью можно: $\frac{4}{5}=0{,}8$.

в) Знаменатель дроби $\frac{1327}{512}$ равен 2^9. Следовательно, записать эту дробь конечной десятичной дробью можно.

До сих пор на ЕГЭ по математике существует правило — ответ к задачам первой части должен быть целыми или конечными десятичными дробями. Например, ответ не может быть $\frac{1}{3}$ или $\frac{2}{7}$ — эти числа не удается записать конечной десятичной дробью. Это обстоятельство работает на руку участникам экзамена. Если ваш ответ не удается записать нужным способом — значит, он неправильный. Можно ли считать такой способ проверки ответа математическим?

Однажды один из авторов этой книжки был на уроке в пятом классе, где изучалось сложение дробей. Учительница подошла к делу серьезно: урок начался с повторения. Дроби изображались долями забора. По условию задачи Петя покрасил $\frac{1}{5}$ забора (ученик старательно закрасил на рисунке одну палочку из пяти), а Аня покрасила $\frac{2}{5}$ забора (ученица, изображая Аню, закрасила две палочки из пяти на своем рисунке).

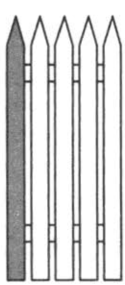


Рисунок мальчика

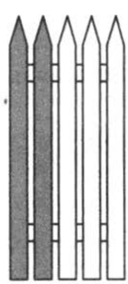
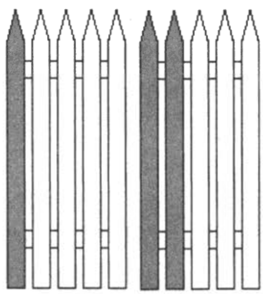


Рисунок девочки

Теперь учительница торжественно предложила детям самим догадаться, какую часть забора Петя и Аня покрасили вместе, а потом придумать правило для сложения дробей (есть такой методический прием, когда учитель ставит новую задачу, а дети должны сами придумать способ решения). Очень скоро один умный мальчик поднял руку и к ужасу учительницы заявил, что нужно отдельно сложить числители, а отдельно — знаменатели:

$$\frac{1}{5}+\frac{2}{5}=\frac{1+2}{5+5}=\frac{3}{10}.$$

Тогда учительница поинтересовалась, как же это правило получилось. Оказалось, очень просто: весь класс сделал самую простую вещь — они положили рисунки рядом и пересчитали планки забора. Всего планок 10, а покрашенных 3.



Теперь трудно будет переучить класс, который совершенно очевидным образом открыл для себя способ сложения дробей. Конечно, если бы учительница догадалась дать один рисунок на двоих, то проблема бы не возникла и школьники сразу бы догадались, что

$$\frac{1}{5}+\frac{2}{5}=\frac{1+2}{5}=\frac{3}{5}.$$

Вы скажете, что это очень легко, и этот рассказ, скорее, важен для будущих учителей математики. Мы согласны. Но тогда, скажите на милость, откуда у нас такое количество одиннадцатиклассников, которые не умеют складывать дроби. На всякий случай правила сложения, умножения и деления дробей мы поместили в справочнике — вдруг кому полезно?

Иррациональные числа

Если число не является рациональным, то говорят, что оно иррациональное. Иррациональные числа также можно записать десятичной дробью, но она будет не только бесконечной, но еще и без периода.

Примеры иррациональных чисел хорошо известны из учебников: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π, e (основание натурального логарифма), $\sin 1^{\circ}$ и множество других.

Иррациональных чисел много. Их гораздо больше, чем рациональных (дробных). Тут, казалось бы, можно удивиться — ведь и тех, и других бесконечно много. Как же можно считать, что одних больше, чем других? Попробуем поставить числа парами. Если каким-то числам пары не хватит, значит, таких чисел больше. Оказывается, что если составлять пары «иррациональное-рациональное», то, как бы мы ни поступили, рациональных чисел не хватит. Причем сильно не хватит.

Можно составить «свое» иррациональное число. Например, 0,1001000100001000001... .

Перед каждой единицей на один нуль больше, чем перед предыдущей. Легко объяснить (попробуйте), почему в этой записи не наступит период. А раз так, значит, число иррациональное.

Задача 43. Придумайте себе свое любимое иррациональное число.

Доли, части и проценты

Просто процента не бывает. Бывает процент какой-то величины, то есть ее сотая часть. Полезно помнить наиболее употребительные части величин, выраженные в процентах:

10% — десятая часть;	50% — половина;
20% — пятая часть;	75% — три четверти;
25% — четверть;	100% — вся величина целиком.

Переход к процентам — это переход к сотым долям величины, а поэтому — к десятичным дробям. Чтобы найти процент от величины, не обязательно делить ее на 100, а потом умножать на что-то. Можно обойтись только умножением.

Задача 44. В школе 75 десятиклассников. Из них 76% утверждают, что им нравится учитель математики. Сколько десятиклассников утверждают, что учитель математики им нравится?

Решение. Чтобы вычислить 76% от величины, ее нужно умножить на 0,76. 76% от 75 будет $75 \cdot 0{,}76 = 57$.

Ответ: 57.

Задача 45. Нужен шестипроцентный уксус, а удалось найти только девятипроцентный. Сколько нужно добавить воды, чтобы получить шестипроцентный?

Решение. Под девятипроцентным уксусом имеется в виду раствор, в котором 9% — уксусная кислота, а 91% — вода. Возьмем 100 мл (полстакана) девятипроцентного уксуса. В этом полстакане 9 мл кислоты. Добавим x мл воды. Теперь общий объем $100 + x$ мл, но кислоты по-прежнему 9 мл. Составим уравнение $\frac{9}{100+x} = 0{,}06$, так как мы хотим получить 6% кислоты в новом растворе. Решим уравнение: $100 + x = 9 : 0{,}06 = 900 : 6 = 150$. Значит, $x = 150 - 100 = 50$.

Итого, к 100 мл девятипроцентного уксуса нужно добавить 50 мл воды.

Ответ: 1 часть воды на 2 части уксуса.

Обычная столовая ложка вмещает примерно 18 мл воды. Поэтому, если вам нечем отмерить 50 мл, просто влейте в полстакана девятипроцентного уксуса четыре столовые ложки воды (54 мл). Получится раствор, в котором примерно 6% кислоты. Если вы перфекционист*, то, прежде чем выливать воду в раствор из последней ложки, попробуйте отлить из нее 10 капель (4 лишних миллилитра). Удачи молодым хозяйкам!

Другая знаменитая «хозяйственная» задача — про сушку грибов.

Задача 46. Свежие грибы содержат 90% воды. При сушке влажность грибов доводят до 14%. Сколько сухих грибов получается из 10 килограммов свежих?

Решение. Будем считать, что при сушке испаряется только вода, а «сухое вещество» (углеводы, жиры, минеральные вещества, витамины) остается. Сухого вещества был 1 килограмм. Он и остался. Но до сушки он занимал 10% массы, а после сушки — 86% массы. Обозначим неизвестную массу x и составим уравнение $1 = x \cdot 0{,}86$, откуда $x = 1 : 0{,}86 \approx 1{,}16$ (кг).

Ответ: 1,16 кг.

Таким образом, грибы усыхают примерно в 9 раз.

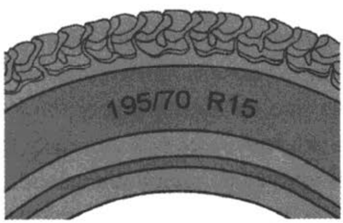
Маркировка автомобильных шин

На каждой шине указаны ее размеры: ширина шины, высота боковины и диаметр обода диска, на который эта шина садится (см. рис).

---

* Перфекционист — тот, кто хочет добиться совершенства.

Так исторически сложилось, что эти три величины указываются по-разному. Ширина шины — в миллиметрах, высота боковины — в процентах от ширины, а диаметр обода — в дюймах.



Обычно сначала пишется ширина, затем через косую черту — высота боковины, а потом — после буквы R — диаметр обода*.

Задача 47. Найти диаметр шины с маркировкой 225/70R17.

Решение. Диаметр складывается из диаметра обода и удвоенной высоты боковины. Нужно не забыть перевести дюймы в миллиметры и учесть, что высота указана в процентах от ширины. Получаем:

$$17 \cdot 25{,}4 + 225 \cdot 0{,}7 \cdot 2 = 746{,}8$$

миллиметра, что после разумного округления дает 75 см.

Ответ: 75.

---

* Буква R многих вводит в заблуждение. Из-за этой буквы диаметр часто путают с радиусом. На самом деле буква R не имеет никакого отношения к размерам шины, а обозначает тип шины: радиальная. Бывают еще диагональные шины, они маркируются буквой B.

Промилле

Помимо процентов используются промилле (обозначаются символом ‰). Один промилле равен одной десятой процента, то есть одной тысячной доле величины. Обычно в промилле измеряют концентрацию слабых растворов, например, морской воды. В Черном море у поверхности средняя соленость составляет 18‰, то есть 1,8%, то есть 18 граммов соли на килограмм воды.

Промилле используются в производстве благородных металлов под названием «проба». Например, золото 585-й пробы — это сплав, где 585‰ золота. Остальное — *лигатура* (никель, цинк, медь и т.п.), влияющая на прочность и цвет сплава.

В промилле измеряется содержание алкоголя в крови. В России управление транспортными средствами в состоянии опьянения запрещено. Сотрудники ГИБДД могут измерить уровень алкоголя в крови водителя с помощью алкотестера. Измерение производится в промилле. Алкотестер не может измерить содержание алкоголя в крови напрямую. Измерение производится косвенно — через содержание паров алкоголя в выдыхаемом воздухе. Сложная процедура измерения и вычисления приводит к возможной ошибке. Поэтому считается, что если алкотестер определяет не более 0,3‰ алкоголя в крови, то считать водителя пьяным нет серьезных оснований. Заметьте, 0,3‰ — это не «разрешенная норма», а допуск на возможную погрешность измерения.

Налог на доходы физических лиц

Очень распространенная практическая задача — вычисление подоходного налога. Если работнику начислена некоторая зарплата, то он получает ее не всю, а за вычетом налога в 13%. Этот налог попросту называется подоходным, а официальное его название — *налог на доходы физических лиц* (НДФЛ). Расчет простой.

Задача 48. Начисленная ежемесячная зарплата Марии Петровны составляет 48 000 рублей. Какую сумму Мария Петровна получает на руки?

Решение. Поскольку удерживается 13% в качестве налога, на руки Мария Петровна получает 87% начисленной суммы:

$$48\,000 \cdot 0{,}87 = 41\,760.$$

Ответ: 41 760.

Задача 49. Мария Петровна договорилась со своим работодателем, что она будет получать ежемесячно 48 000 рублей уже после удержания налога. Какую зарплату работодатель должен начислить Марии Петровне, чтобы выполнить договоренность?

Решение. Задача обратная задаче 26. Обозначим неизвестную зарплату x. Тогда

$$x \cdot 0{,}87 = 48\,000.$$

Значит, $x = \dfrac{48000}{0{,}87} = 55172{,}41$ (с округлением до сотых, то есть до копеек).

Ответ: 55 172 рубля 41 копейку.

Задача 50. Сергей получил первую зарплату — ему на банковскую карту пришло 30 450 рублей*. Чему равна заработная плата Сергея?

Бывает ли больше 100 процентов?

Последний министр финансов СССР Валентин Павлов, выступая по телевизору, заявил, что в результате либерализации цен 1 апреля 1991 года ожидается повышение цен в среднем на 200%, то есть в 2 раза. Никто из журналистов не переспросил, и вообще никаких комментариев не последовало**.

Вообще с переводом из процентов в умножение или деление возникают проблемы: например, увеличение вдвое — это рост на 100%, а снижение вдвое — это снижение на 50%. Еще интереснее: рост вчетверо — это рост на 300%, а снижение в четыре раза... нет, не на 300% и не на 150%, а на 75%. Если же уменьшить величину на 300%, она станет отрицательной... На первый взгляд никакой логики.

---

* После вычета НДФЛ. Работодатель всегда перечисляет сотруднику заработную плату уже после вычета.

** Увеличение на 200% — это рост в три раза, а не в два.

Несмотря ни на что, больше 100 процентов бывает. Например, можно выполнить какую-нибудь работу на 120%. Нужно, скажем, выкопать канаву длиной 50 метров, а мы взяли и на радость всем прокопали 60 метров.

Рапортуя о перевыполнении планов, некоторые журналисты часто радовались через край. Например, в газете «Правда» могло быть написано, что ткачихи Энского камвольного комбината перевыполнили годовой план на 120%. Означало ли это, что они сделали 220% нормы или что журналист просто путался в словах и процентах — неизвестно.

Превышение 100 процентов означает, что некоторая величина выросла по сравнению со своим прежним значением. Одну и ту же мысль можно выразить двумя способами. Например: «за год население города выросло на 2%» или «сейчас население города составляет 102% прошлогоднего значения». Ясно, что первая формулировка короче и звучит лучше и ярче подчеркивает тенденцию роста.

Но вот при вычислениях обычно удобнее второй способ.

Задача 51. В прошлом году население города составляло 45 000 жителей. За год население выросло на 2%. Найдите нынешнюю численность населения города.

Решение. Опять-таки, вместо двух действий можно обойтись одним. Нынешняя численность населения составляет 102% прошлогодней. Значит, нужно умножить прошлогоднюю численность на 1,02:

$$45\,000 \cdot 1{,}02 = 45\,900.$$

Ответ: 45 900.

Задача 52. После повышения на 30% цена электрического чайника составила 2470 рублей. Найдите прежнюю цену чайника.

Решение. Нынешняя цена составляет 130% прежней. Значит, если прежняя цена x, то $x \cdot 1{,}3 = 2470$,
откуда $x = 2470 : 1{,}3 = 1900$.

Ответ: 1900 рублей.

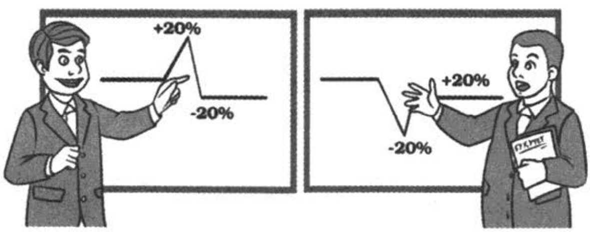
Задача 53. Перед Новым годом хозяин магазина распорядился сделать скидку на все товары 20%. После окончания каникул хозяин распорядился снова поднять цены на 20%. Вернутся ли цены к прежнему уровню?

Решение. Пусть цена на некоторый товар была, например, 100 рублей. Скидка 20% означает, что цену умножают на 0,8 (новая цена составляет 80% прежней). Последующее увеличение цены на 20% означает, что теперь новую действующую цену нужно умножить на 1,2. Получаем окончательную цену: $100 \cdot 0{,}8 \cdot 1{,}2 = 96$.

Таким же образом поведут себя цены и на другие товары — они в результате окажутся меньше предновогодних на 4%.

Ответ: не вернутся — они станут меньше прежних на 4%.

Занятно то, что результат не изменится, если цену сперва поднять, а потом опустить — ведь от перемены мест множителей 0,8 и 1,2 произведение не изменится.



Задача 54. На сколько процентов нужно поднять цену на товар после скидки на 20% чтобы цена стала прежней — как до скидки?

Проценты и процентные пункты

Иногда в разговоре о процентах возникает путаница. Дорожно-строительная компания заявила, что в прошлом году на 100-километровом участке трассы Андреево–Борисово отремонтировано 32% дорожного покрытия, а в этом году — на 5% больше. Так сколько же километров дорожного покрытия отремонтировано в этом году?

Вариант понимания первый. В прошлом году отремонтировано 32%, в этом году — 37% (на пять больше). Получается, что в этом году отремонтировано 37 километров.

Вариант понимания второй. В прошлом году отремонтировано 32%, то есть 32 км, а в этом году на 5% больше этой величины: $32 \cdot 1{,}05 = 33{,}6$ километра.

Так как же верно? К сожалению, отчет компании сформулирован невнятно. То ли компания не понимает, что пишет, то ли не хочет, чтобы другие поняли. Встречается подобное часто.

Чтобы избегать подобных двусмысленностей, экономисты называют процент исходной величины процентным пунктом. Если бы дорожная компания заявила, что в этом году отремонтировано на 5 процентных пунктов больше, чем в прошлом, это можно было бы понять однозначно — отремонтировано 37% от 100 километров. Но в этом случае есть опасность, что поняли бы дорожников только экономисты. Это, конечно, не хуже нынешней ситуации, когда не понял никто. В школе это почему-то не изучают. Может быть, если бы изучали, то путаницы было бы меньше.

Чаще всего путаница с процентами возникает тогда, когда тот, кто считает, не очень хорошо понимает, от какой величины он вычисляет процент. Если в процессе вычислений величина меняется, то каждое следующее вычисление процентов производится уже от новой величины. Такая ситуация обычно возникает при расчете кредитов и вкладов (так называемые *сложные проценты*).

Вклады, кредиты и сложные проценты

С банковскими услугами приходится иметь дело почти всем. Основные банковские услуги для населения — вклады (депозиты) и кредиты.

Вклад — размещение наших денег в банке на определенных условиях. Главное условие — годовая ставка. Банк пользуется вашими деньгами и за это платит вам определенную ежегодную долю вашего вклада, выраженную в процентах. Но проценты часто начисляются по-разному, за разные периоды. Многие банки стараются внешне сделать свой вклад попривлекательнее, обещая большую ставку. При этом часто возникают дополнительные условия (все проценты в конце срока, ставка увеличивается через год и т.п.). Важно уметь читать и понимать разницу между разными условиями вклада или кредита при, казалось бы, одинаковой процентной ставке.

Самый простой случай, когда проценты по вкладу начисляются один раз в год, а сумма вклада не меняется. Например, клиент кладет в банк вклад в размере 10 000 рублей под 9% годовых. Это значит, что через год банк начислит клиенту $10\,000 \cdot 0{,}09 = 900$ рублей. Клиент может их снять, а может — капитализировать, то есть приплюсовать к вкладу. Можно сразу посчитать размер вклада после капитализации:

$10\,000 \cdot 1{,}09 = 10\,900$ (рублей).

Задача 55. Найдите сумму вклада этого клиента после истечения второго года (клиент опять не снимает проценты, а капитализирует их — присоединяет ко вкладу).

Если клиент ежегодно снимает набежавшие проценты, то сумма вклада не меняется. Например, было 10 тыс. рублей, набежало 900 рублей процентов, клиент их снял, чтобы купить новогодний подарок, на счету снова 10 тыс. рублей.

За счет банковских процентов формируются неиссякаемые фонды. Наиболее известный — Нобелевский фонд. Альфред Нобель завещал все свои средства поместить в надежный банк. Первоначальный взнос в 1900 году составлял 31 млн шведских крон. За 115 лет условия вклада менялись, но суть осталась — проценты от вклада поступают в распоряжение Нобелевского фонда, который за счет этих средств награждает Нобелевской премией выдающихся ученых, писателей и общественных деятелей. Каждый год в качестве премий выплачивается около 1% от вклада.

Если же клиент не снимает полученный доход, а капитализирует его (приплюсовывает ко вкладу), то в следующий раз, как мы видели, процент начисляется уже на новую сумму. Такая схема называется «*сложными процентами*». Термин этот не математический, а экономический.

Покажем разницу между обычными и сложными процентами на примере.

Задача 56. Банк ABC принял у клиента 10 тыс. рублей на год с обязательством начислить 12% в конце срока. Банк КЛМ принял у клиента 10 тыс. рублей на год с обязательством выплатить 12% годовых, но начисления проводить раз в полгода по 6% каждый раз. Какой из банков предложил лучшие условия?

Решение. С банком ABC все просто. Через год клиент будет иметь $10\,000 \cdot 1{,}12 = 11\,200$ рублей.

Банк КЛМ делает два начисления:

$10\,000 \cdot 1{,}06 = 10\,600$ рублей.

$10\,600 \cdot 1{,}06 = 11\,236$ рублей.

Ответ: условия в банке КЛМ лучше: при годовом вкладе 10 тыс. рублей доход оказался больше на 36 рублей.

Если банк производит начисления процентов раз в три месяца (по 4%) или ежемесячно по 1%, то условия оказываются еще лучше. При оформлении вклада нужно внимательно изучить договор и понять, какая именно схема начисления процентов предлагается. Аналогично (и еще важнее) понимать, как именно будут начисляться проценты по кредиту.

Если бы банк только принимал вклады и выплачивал по ним проценты, он не мог бы развиваться и, наверное, разорился бы. Важнее для банков не хранить вклады, а выдавать кредиты. Кредит — вклад наоборот. Банк предоставляет клиенту-заемщику средства, а за право пользования этими деньгами взимает процент согласно установленной ставке.

Другой известный вид неиссякаемых фондов — эндаумент. Выпускники университета жертвуют небольшие суммы, которые образуют фонд, проценты от которого тратятся руководством фонда на нужды университета, при этом руководство не имеет права использовать сам вклад. Это гарантирует фонд от растраты — даже если руководство оказалось нечистым на руку, сам вклад уцелел, и проценты продолжают исправно начисляться.

Потребительский кредит — самый распространенный и небольшой. Обычная схема такова. Пусть, например, клиент взял в банке кредит 100 000 рублей на год под 24% годовых с обязательством выплачивать 9 000 рублей ежемесячно на протяжении 11 месяцев, а оставшуюся сумму погасить последним, двенадцатым платежом.

Каждый месяц банк начисляет на сумму долга клиента 2% (заметьте, что это не то же самое, что взять двенадцатую часть от 24% годовых). Через месяц сумма долга клиента составит $100\,000 \cdot 1{,}02 = 102\,000$. Клиент выплачивает 9 000 рублей, тем самым погашая начисленные проценты и часть основного долга. Теперь он должен 93 000 рублей.

Задача 57. Какую сумму клиент останется должен банку после второго платежа?

Решение. $93\,000 \cdot 1{,}02 - 9000 = 85\,860$ рублей.

Ответ: 85 860 рублей.

Задача 58. Каков размер последнего платежа и какова общая сумма всех выплат?

Решение. После третьего платежа общая сумма долга составит $85\,860 \cdot 1{,}02 - 9000 = 78\,577{,}2$ рубля.

Дальнейшие расчеты ведутся так же, но весьма утомительны, если их делать вручную. Зато их легко выполнить с помощью компьютера. Получается, что после одиннадцатого платежа сумма долга составит 14 818 р. 99 к., а к последнему, двенадцатому, платежу с учетом процентов клиент будет должен 15 115 р. 37 к. Именно такую сумму клиент должен будет выплатить в свой последний платеж. Таким образом, полная переплата (иногда говорят — *стоимость кредита*) составит 14 115 р. 37 копеек. То есть в реальности клиент выплатит сверх основного долга 100 000 рублей — не 24% от этой суммы, а несколько больше 14%. Так происходит потому, что месяц от месяца сумма долга уменьшается.

Ответ: 15 115 р. 37 к., 114 115 р. 37 к.

Часто сумму ежемесячного платежа подбирают таким образом, чтобы все платежи оказались равными. Это не очень сложно, но все же требует некоторых знаний. С этим легко справляются кредитные калькуляторы (возможно, в вашем мобильном телефоне есть такой). Встречаются и несколько иные условия кредитования. Многое зависит от суммы, целей и обеспеченности кредита, но в целом идея кредита всегда одна и та же.

Чтобы лучше разобраться с простыми и сложными процентами, решим задачу. Клиент А. положил на депозитный счет в банк 10 000 р. под процентную ставку 2% годовых на 5 лет. Проценты начисляются в конце каждого года. Какая сумма процентов набежит за пять лет, если процентная ставка исчисляется

а) в простых процентах; б) в сложных процентах?

Решение. а) Такая ситуация возникает, если клиент каждый год переводит набежавшие проценты на свой текущий счет и оставляет на депозитном счете снова ровно 10 000 р. К концу каждого года на счету образуется $10\,000 \cdot 1{,}02 = 10\,200$ рублей, то есть 200 рублей — набежавшие проценты. За пять лет: $200 \cdot 5 = 1000$ р.

б) Такая ситуация возникает, если набежавшие проценты прибавляются к вкладу — капитализируются, и, тем самым, сумма вклада увеличивается. К концу первого года получается, как мы знаем, 10 200 р. Но теперь процент вычисляется уже от этой суммы, а не от старой. Поэтому к концу второго года на счете будет $10\,200 \cdot 1{,}02 = 10\,404$ р. Коротко это можно записать так: $10\,000 \cdot 1{,}02^2 = 10\,404$. И так далее. Через пять лет сумма вместе с процентами составит $10\,000 \cdot 1{,}025 \approx$ $\approx 11040{,}8$ р., то есть 11 040 р. и 80 коп. Следовательно, за пять лет в качестве процентов набежало 1040 р. 80 коп.

Задачи к главе 2

Задача 59. Найдите значение выражения $1\frac{5}{6}+4+\left(-2\frac{1}{12}\right)$.

Задача 60. Найдите значение выражения $\left(2\frac{4}{9}-2\frac{4}{5}\right):\frac{4}{45}$.

Задача 61. Найдите значение выражения

$$8 \cdot 10^{-2} + 7 \cdot 10^{-1} + 6 \cdot 10.$$

Задача 62. Найдите значение выражения $\frac{4\sqrt{98}}{\sqrt{2}}$.

Задача 63. Площадь земель фермерского хозяйства, отведенных под посадку сельскохозяйственных культур, составляет 72 га и распределена между зерновыми и зернобобовыми культурами в отношении 7 : 2 соответственно. Сколько гектаров занимают зернобобовые культуры?

Задача 64. В школе мальчики составляют 58% числа всех учащихся. Сколько в этой школе всего учащихся, если мальчиков в ней на 88 человек больше, чем девочек?

Задача 65. Магазин детских товаров закупает погремушки по оптовой цене 90 рублей за одну штуку и продает с наценкой 70%. Сколько рублей будут стоить 3 такие погремушки, купленные в этом магазине?

Задача 66. Найдите диаметр автомобильного колеса с шиной 175/65 R14.

Задача 67. Сберегательный банк начисляет на срочный вклад 17% годовых. Вкладчик положил на счет 2000 рублей. Сколько рублей будет на этом счете через год, если никаких операций, кроме начисления процентов, со счетом проводиться не будет?

Задача 68. Государству принадлежит 10% акций предприятия, остальные акции принадлежат частным лицам. Общая прибыль предприятия после уплаты налогов за год составила 30 млн рублей. Какая сумма из этой прибыли должна пойти на выплату частным акционерам? Ответ дайте в миллионах рублей.

Задача 69. В период распродажи магазин снижал цены дважды: в первый раз на 25%, во второй — на 15%. Сколько стал стоить чайник после второго снижения цен, если до начала распродажи он стоил 1600 рублей?

Задача 70. Число дорожно-транспортных происшествий (ДТП) в летний период составило 0,85 числа ДТП в зимний период. На сколько процентов уменьшилось число дорожно-транспортных происшествий летом по сравнению с зимой?

Задача 71. Налог на доходы составляет 13% от заработной платы. После удержания налога на доходы Мария Константиновна получила 10 875 рублей. Сколько рублей составляет заработная плата Марии Константиновны?

Задача 72. Число больных гриппом в школе уменьшилось за месяц в двадцать раз. На сколько процентов уменьшилось число больных гриппом?

Задача 73. Налог на доходы составляет 13% от заработной платы. Заработная плата Ивана Кузьмича равна 11 000 рублей. Какую сумму он получит после вычета налога на доходы? Ответ дайте в рублях.

Задача 74. Клиент положил в банк 50 000 рублей на 10 лет под процентную ставку 3% годовых. Определите, какая сумма будет на счету к концу срока вклада, если проценты начисляются в конце каждого года и капитализируются.

ГЛАВА 3. УРАВНЕНИЯ

Умение решать уравнения, возникшее когда-то в незапамятные времена, давно стало самостоятельным школьным умением. В главе 2 мы уже использовали уравнения, когда считали, что это поможет решить задачу.

Но вряд ли кто-то сумеет объяснить, зачем в жизни нужно уметь решать те или иные абстрактные уравнения. Вероятно, решение уравнений развивает определенные способности применять стандартные приемы и искать нестандартные. Уравнения школьного курса математики можно рассматривать как род головоломки.

С другой стороны, решение уравнения представляет собой прекрасный пример выполнения алгоритма — последовательности известных действий, приводящих к цели. По выражению одного математика, решение квадратных уравнений — магия, поддающаяся проверке. Действительно, безошибочно проведя вычисления по некоторой формуле, мы гарантированно получаем верные решения квадратного уравнения. При этом можно не понимать, откуда и как получается эта формула (например, она есть в справочных материалах ЕГЭ или в этой книжке в справочнике и на странице 52).

Ну и, наконец, уравнения удобны для решения задач.

Линейные уравнения

Уравнения первой степени — чаще их называют *линейными уравнениями* — решаются с помощью простых правил. Нужно добиться того, чтобы в одной части уравнения была только переменная (скажем, x), а в другой — только число.

Правила — раскрытие скобок или вынесение за скобки, перенос слагаемых из одной части в другую* и умножение или деление обеих частей уравнения на одно и то же число.

---

* Перенос слагаемых из одной стороны в другую можно понимать как добавление к обеим частям уравнения одного и того же числа (или вычитание числа). В арабском языке эта операция — дословно «восполнение» — называется аль-джабр. Отсюда пошло слово «алгебра».

Задача 75. Решите уравнение $4x - 2 = 0$.

Решение. Перенесем -2 в правую часть: $4x = 2$. Разделим обе части на 2: $x = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Ответ: $\frac{1}{2}$.

Задача 76. Решите уравнение $3(x - 2) + 4 = -x - 2(5 + x)$.

Решение. Раскроем скобки (главное, не напутать в знаках):

$$3x - 6 + 4 = -x - 10 - 2x.$$

Переносим все члены с x в левую часть, а все числа — в правую и приводим подобные:

$$3x + x + 2x = -10 + 6 - 4;\ 6x = -8.$$

Разделим обе части на 6 и сократим получившуюся дробь.

$$x = -\frac{8}{6};\ x = -\frac{4}{3}.$$

Ответ: $-\frac{4}{3}$.

Задача 77. Решите уравнение $\log_3(2x - 5) = 4$.

Решение. Конечно, это уравнение не линейное. Мы скажем, что оно *логарифмическое*. На самом деле первым делом можно избавиться от логарифма. Для этого достаточно использовать его определение*: $2x - 5 = 3^4$; $2x - 5 = 81$; $x = 43$. Как видим, логарифм здесь лишь «запутывающий» элемент, причем запутывающий несильно, так как избавление от логарифма не составляет никакого труда.

Ответ: 43.

Задача 78. Решите уравнение $\left(\frac{1}{2}\right)^{4x-3} : \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} = 1.$

Решение. Теперь мы скажем, что это уравнение *показательное*. Но переход к линейному очень простой. Пользуясь тем, что $a^x : a^y = a^{x-y}$, получаем: $\left(\frac{1}{2}\right)^{4x-3-(x-1)} = 1.$

---

* Определение логарифма и все остальные необходимые сведения помещены в главе «Справочник».

Единицу в правой части представим в виде $\left(\frac{1}{2}\right)^0$ и приравняем показатели.

$\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^0$; $3x - 2 = 0$; $x = \frac{2}{3}$.

Как видим, опять же уравнение оказалось «испорченным линейным».

Ответ: $\frac{2}{3}$.

Древние цивилизации придумали уравнения для решения задач, потому что уравнение позволяет работать с неизвестными числами как с известными. Эту глубокую математическую идею хорошо иллюстрирует Антон Павлович Чехов в рассказе «Репетитор»*. Ученик VII класса гимназии Егор Зиберов (учитель) занимается с учеником Петей в присутствии его отца — купца Удодова.

Учитель берет задачник и диктует:

— «Купец купил 138 арш. черного и синего сукна за 540 руб. Спрашивается, сколько аршин купил он того и другого, если синее стоило 5 руб. за аршин, а черное 3 руб.?» Повторите задачу.

Петя повторяет задачу и тотчас же, ни слова не говоря, начинает делить 540 на 138.

— Для чего же это вы делите? Постойте! Впрочем, так... продолжайте. Остаток получается? Здесь не может быть остатка. Дайте-ка я разделю!

Зиберов делит, получает 3 с остатком и быстро стирает.

«Странно... — думает он, ероша волосы и краснея. — Как же она решается? Гм!.. Это задача на неопределенные уравнения, а вовсе не арифметическая»...

Учитель глядит в ответы и видит 75 и 63.

---

* Наверное, замысел Чехова если и был, то не имел прямого отношения к иллюстрации математических концепций. Не удивляет точность, с которой Чехов передает растерянность персонажей, пытающихся бессмысленно делить одно число на другое: ведь прототипом гимназиста-репетитора Зиберова был сам Чехов.

«Гм!.. странно... Сложить 5 и 3, а потом делить 540 на 8? Так, что ли? Нет, не то».

— Решайте же! — говорит он Пете.

— Ну, чего думаешь? Задача-то ведь пустяковая! — говорит Удодов Пете. — Экий ты дурак, братец! Решите уж вы ему, Егор Алексеич.

Егор Алексеич берет в руки грифель и начинает решать. Он заикается, краснеет, бледнеет.

— Эта задача, собственно говоря, алгебраическая, — говорит он. — Ее с иксом и игреком решить можно. Впрочем, можно и так решить. Я, вот, разделил... понимаете? Теперь, вот, надо вычесть... понимаете? Или, вот что... Решите мне эту задачу сами к завтраму... Подумайте...

Петя ехидно улыбается. Удодов тоже улыбается. Оба они понимают замешательство учителя. Ученик VII класса еще пуще конфузится, встает и начинает ходить из угла в угол.

— И без алгебры решить можно, — говорит Удодов, протягивая руку к счетам и вздыхая. — Вот, извольте видеть...

Он щелкает на счетах, и у него получается 75 и 63, что и нужно было.

— Вот-с... по-нашему, по-неученому.

Мы не знаем, как решал задачу Удодов, но попробуем предположить. Затем эту же задачу мы решим по-зиберовски, — уравнениями и сравним оба способа.

Вероятно, Удодов думал так: «Если бы купец купил 138 аршин только черного сукна, он заплатил бы $138 \cdot 3 = 414$ рублей. А он заплатил на $540 - 414 = 126$ рублей больше. Отчего не сходится? От того, что синее сукно дороже на 2 рубля за аршин. 126 рублей разницы набежит, если купец купит $126 : 2 = 63$ аршина синего сукна.

Зиберов, вероятно, предлагает считать, что купец купил x аршин синего и y аршин черного сукна. Тогда получается система

$$\begin{cases} x + y = 138, \\ 5x + 3y = 540, \end{cases}$$

решив которую, получим: $x = 63$, $y = 75$.

Можно обойтись одним уравнением, сразу заявив, что черного сукна было куплено $138 - x$ аршин, а потому

$$5x + 3(138 - x) = 540.$$

Сравним эти три способа. Первый способ требует непростой арифметико-логической модели: «Если бы... то не сходится. А чтобы сошлось, нужно...» Зато само решение сводится к делению 126 на 2.

Второй способ избавляет нас от необходимости думать вначале, алгебраическая модель строится легко. Зато требуется умение решить систему.

И, наконец, третий способ — усеченный второй, где первое уравнение уже разрешено относительно y.

Какой способ предпочтительнее? Каждый должен выбрать для себя либо вообще отказаться от решения математических задач. Лично автор предпочел бы второй способ. И не потому, что автор ленится думать. Скорее потому, что Зиберов прав — здесь напрашивается алгебраическое решение. В этой задаче оно естественное. Насколько правильно предлагать такую задачу школьнику, не знакомому с идеей составления уравнений? Вопрос сложный. Скорее правильно, поскольку жизнь предлагает задачи, не спрашивая нас, знакомы ли мы с методами их решения.

Квадратные уравнения

В древности *квадратные уравнения* возникали из задач, точно так же, как возникают и сейчас. Круг задач был, наверное, более узким. Но в XXI веке до нашей эры квадратные уравнения уже умели решать. Правда, отсутствие ясных представлений об отрицательных числах долго мешало найти общий метод.

Любое квадратное уравнение можно решить с помощью преобразования, при котором вычисляется очень важное число — дискриминант. В результате получаются всем хорошо известные формулы

$$x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}, \quad x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$$

корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$. Число a не должно равняться нулю, иначе уравнение не квадратное.

$D = b^2 - 4ac$ — это *дискриминант* уравнения.

От знака дискриминанта зависит число действительных корней квадратного уравнения. Если дискриминант положителен, то их два, если отрицателен, то их нет вовсе, а если равен нулю, то корень один.

Дискриминант можно перевести с латыни как «различитель», потому что дискриминант связан с разностью корней: $D = a^2(x_2 - x_1)^2$. Если бы авторы старых русских учебников перевели слово «дискриминант» на русский язык, то мы, наверное, говорили бы: «Если различитель уравнения положителен, то оно имеет два различных действительных корня».

Строго говоря, дискриминант имеет не уравнение, а многочлен, стоящий в левой части. Дискриминант есть не только у квадратного трехчлена. У многочленов более высоких степеней дискриминанты также имеются.

Часто эти две формулы объединяют, используя символ $\pm$. Этот знак не обозначает действие, а лишь говорит, что можно взять минус, а можно взять плюс, и при этом получаются два разных числа. Таким образом, формула $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ — на самом деле не формула, а краткая запись двух разных формул.

Задача 79. Решите уравнение $x^2 - 6x + 8 = 0$.

Решение. Найдем дискриминант: $D = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = 4$.

Корни: $\dfrac{6-2}{2} = 2$ и $\dfrac{6+2}{2} = 4$.

Ответ: 2; 4.

Задача 80. Решите уравнение $x^2 + 5x = -6$.

Решение. Сначала уравнение запишем в стандартном виде:

$$x^2 + 5x + 6 = 0.$$

Дальше решение такое же, как и в предыдущей задаче. Дискриминант: $D = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1$.

Корни: $\dfrac{-5-1}{2} = -3$ и $\dfrac{-5+1}{2} = -2$.

Ответ: −3; −2.

Полезно сделать проверку. Мы покажем, как делать быструю проверку с помощью *теоремы Виета*: произведение корней должно быть равно свободному члену: $-3 \cdot (-2) = 6$.

Так и должно быть. Мы почти наверняка не ошиблись. Обычно этого достаточно.

Чтобы проверить наверняка, можно сложить найденные корни: должен получиться второй коэффициент с противоположным знаком. В нашем уравнении второй коэффициент 5, значит, должно получиться -5. Проверяем:

$$-3 + (-2) = -5.$$

Все верно. Если хотя бы в одном из расчетов что-то не сходится, лучше остановиться и поискать ошибку.

Обидно, но факт: наибольшее число ошибок на ЕГЭ именно в счете при решении квадратных уравнений.

Задача 81. Решите уравнение $3x^2 = 5x + 8$.

Решение. Запишем уравнение в стандартном виде:

$$3x^2 - 5x - 8 = 0.$$

Дискриминант равен $5^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-8) = 121$.

Корни: $\frac{5-11}{6} = -1$ и $\frac{5+11}{6} = \frac{8}{3}$. Проверяем произведение: $-1 \cdot \frac{8}{3} = -\frac{8}{3}$. Это не совпадает со свободным членом -8. Но и не должно: ведь старший коэффициент равен 3. Если мы разделим обе части уравнения на 3, получится $x^2 - \frac{5}{3}x - \frac{8}{3} = 0$.

Теперь видно, что все в порядке.

Ответ: -1 и $\frac{8}{3}$.

Принято говорить, что если дискриминант квадратного уравнения равен нулю, то уравнение имеет один корень. Это не совсем так. Проведем аналогию: Маша и Саша — два разных человека, но Маша встала перед Сашей, и Сашу не видно. Они «совместились», но от этого Саша не исчез. Их по-прежнему двое, хотя кажется, что один. Так и совпавшие корни — корня два, но они совместились в одной точке.

Задача 82. Решите уравнение $x^2 - 16x = -64$.

Решение. Преобразуем уравнение: $x^2 - 16x + 64 = 0$. Дискриминант: $16^2 - 4 \cdot 64 = 0$. Два совпавших корня, которые получаются из общей формулы отбрасыванием $\pm D$: $\frac{16}{2} = 8$.

Можно было бы записать в ответе два числа: 8 и 8. Но все же обычно корень пишут один раз.

Ответ: 8.

Неполные квадратные уравнения

Квадратное уравнение называют неполным, если второй или третий коэффициенты равны нулю. Выглядит это так, как будто в уравнении чего-то не хватает. Наверное, поэтому его и называют неполным.

Задача 83. Решите уравнение $x^2 - 16 = 0$.

Решение. Получаем: $x^2 = 16$. Должно быть два корня. Очевидно, -4 и 4.

Ответ: -4 и 4.

Задача 84. Решите уравнение $2x^2 - 5x = 0$.

Решение. Здесь свободный член равен нулю. Вынесем x за скобки: $x(2x - 5) = 0$. Уравнение «разваливается» на два линейных: $x = 0$ или $2x - 5 = 0$, откуда $x = \frac{5}{2}$.

Ответ: 0 и $\frac{5}{2}$.

Всякое неполное квадратное уравнение можно решить по общим формулам, но это странно. Например, задачу 83 можно было решать так. Дискриминант равен $0^2 - 4 \cdot (-16) = 64$. Тогда формулы корней дают

$$\frac{-0-8}{2} = -4 \text{ и } \frac{-0+8}{2} = 4.$$

Выглядит такое решение нелепо, но может пригодиться для самопроверки.

Линейные уравнения, которые «прикидываются» квадратными

В банке экзаменационных задач можно найти такое уравнение.

Задача 85. Решите уравнение $(x-3)^2=x^2$.

Решение. Вторая степень на месте. Но возведем левую часть в квадрат: $x^2-2\cdot x\cdot 3+9=x^2$; $-6x+9=0$.

Вторые степени взаимно уничтожились. Уравнение оказалось линейным.

Ответ: $\frac{3}{2}$.

Возникает искушение в уравнении $(x-3)^2=x^2$ сразу «удалить квадраты» слева и справа. Давайте попробуем: $x-3=x$. Получается $-3=0$. Икс пропал. Решение потерялось. Подумайте, почему так получилось.

Квадратные уравнения, которые «прикидываются» линейными

Рассмотрим обратную ситуацию.

Задача 86. Решите уравнение $(2x-1)^2=(3-x)^2$.

Чем-то это уравнение напоминает предыдущее. Мы уже знаем, что просто «снимать квадраты» опасно. Можно воспользоваться формулами сокращенного умножения:

$4x^2-4x+1=9-6x+x^2$; $3x^2+2x-8=0$.

Дальше решение обычное: дискриминант равен

$$4+4\cdot 3\cdot 8=100.$$

Корни $\frac{-2+10}{6}=\frac{4}{3}$ и $\frac{-2-10}{6}=-2$.

Другой способ. Перенесем все члены в левую часть, чтобы получилась разность квадратов, а затем преобразуем эту разность квадратов:

$(2x-1)^2-(3-x)^2=0$;

$(2x-1-3+x)(2x-1+3-x)=0$;

$(3x-4)(x+2)=0$.

Уравнение «распалось»: $3x - 4 = 0$ или $x + 2 = 0$, откуда $x = \frac{4}{3}$ или $x = -2$.

Ответ: $\frac{4}{3}$, -2.

Задачи к главе 3

Задача 87. Найдите корень уравнения $4 - 2x = -4x + 5$.

Задача 88. Найдите корень уравнения $5 - 2x = 8x + 9$.

Задача 89. Найдите корень уравнения $-2(-5 - 3x) - 5x = -2$.

Задача 90. Найдите корень уравнения $5^{4x-5} = 5^{3x-2}$.

Задача 91. Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{4}\right)^{4x+1} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{5-2x} = \frac{1}{16}$.

Задача 92. Найдите корень уравнения $\log_2(3x+1) = 4$.

Задача 93. Найдите корень уравнения $\log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2}x - 3\right) = -1$.

Задача 94. Найдите корень уравнения

$$\log_9(2x-13) + \log_9 7 = \log_9 14.$$

Задача 95. Найдите корень уравнения $6^{x-14} = \frac{1}{36}$.

Задача 96. Решите уравнение $x^2 - 7x = 18$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.

Задача 97. Решите уравнение $x^2 + 3x - 18 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите больший из них.

Задача 98. Найдите корень уравнения $\sqrt{5x+11} = 4$.

Задача 99. Решите уравнение $x^2 = 9$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.

Задача 100. Решите уравнение $x^2 + 4x = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.

Задача 101. Найдите корень уравнения $(3x-6)^2 - 9x^2 = 0$.

Задача 102. Найдите корень уравнения $(x-12)^2 = (x-14)^2$.

ГЛАВА 4. ПРОСТЕЙШИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФИГУРЫ

Наглядные геометрические задачи

Для решения практических геометрических задач обычно не требуется глубоких знаний. Нужно только вообразить и изобразить геометрическую фигуру и искомую величину. Чаще всего приходится находить длины, углы, площади или объемы.

Длина и угол — величины очень наглядные. В жизни длины и углы обычно можно, так или иначе, непосредственно измерить рулеткой, линейкой, шагами, транспортиром или угломером.

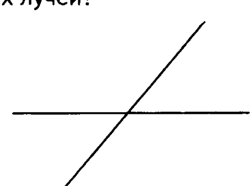
Площадь — тоже наглядная величина, но весьма обманчива. К тому же площадь очень трудно измерить непосредственно. Площадь почти всегда приходится определять косвенно через другие величины или с помощью вычислений.

Объем — еще более обманчивая величина. Объемы тоже часто приходится вычислять, однако есть и способы измерения объемов тел: можно либо налить воду внутрь тела, либо наоборот — погрузить тело в воду и посмотреть, сколько воды это тело вытесняет.

Углы

Авторы школьных учебников геометрии всегда испытывают трудности, когда приходится писать о том, что такое угол.

Если угол — это два луча с общим началом, то что такое угол между прямыми? Можно договориться, что угол между прямыми — это угол, который меньше (не больше) другого. Но тогда приходится говорить о величине угла. А какая величина у двух лучей?

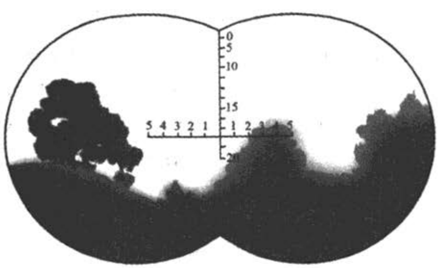


Если считать углом часть плоскости, ограниченную двумя лучами, то опять проблема — этих частей две. Разумеется, все эти проблемы не очень серьезные. Можно все продумать аккуратно и точно. Только получается довольно громоздко. К счастью, все это не мешает использовать углы на практике.

Не будем обращать внимания на тонкие вопросы. Для нас угол — это и два луча, и часть плоскости, и угловая величина, которая больше или меньше 180° или даже 360° градусов. Все зависит от того, что именно мы хотим сделать или посчитать.

Измеряют углы в градусах или в радианах. Есть и другие меры углов, но они менее употребительны.

В военном деле, особенно в артиллерии, принято свое специальное измерение углов. Там углы измеряют тысячными. Полная окружность содержит 6 000 тысячных. Поэтому прямой угол равен 1500 тысячных. Если вы когда-нибудь смотрели в военный бинокль или прицел, то наверняка видели горизонтальную и вертикальную разметку, нанесенную на линзу. Это и есть разметка в тысячных.

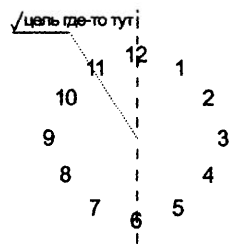


В качестве простого и всем понятного измерителя углов люди с давних пор используют стрелки часов. Сделав полный оборот, стрелка поворачивается на угол 360°. Половина оборота 180°, четверть оборота 90° и т.д.

Часто в фильмах один пилот кричит другому по радио что-то вроде:

— Вижу цель на 11 часов!

Это значит, что цель находится слева и впереди, примерно как число 11 на циферблате часов.



Задача 103. Найдите угол, на который поворачивается часовая стрелка за час.

Задача 104. На какой угол Земля поворачивается за 1 час вокруг своей оси?

Решение. За сутки Земля повернется примерно* на 360°.

Значит, за час Земля повернется на $\frac{360°}{24} = 15°$.

Можно было использовать результат предыдущей задачи. Ведь часовая стрелка вращается вдвое быстрее земного шара.

Ответ: 15°.

Для точных измерений используются доли градуса. 1/60 градуса называется угловой минутой $1'$, а 1/60 угловой минуты называется угловой секундой $1''$. Таким образом,

$$1° = 60' = 3600''.$$

Задача 105. На какой угол Земля поворачивается за 1 минуту вокруг своей оси?

Решение. Воспользуемся результатом предыдущей задачи:

$$\frac{150°}{60} = 0{,}25° = 15'.$$

Ответ: $15'$.

В XVIII веке, когда французские ученые вводили метрическую систему мер, было решено заодно и углам придумать новую меру. Так появился град (или гон). 1 град обозначается 1^g. В прямом угле 100 градов, то есть 1 град = 1^g = 0,9°. Град состоит из 100 метрических минут (сантиградов), а сантиград состоит из 100 метрических секунд. Но грады не прижились.

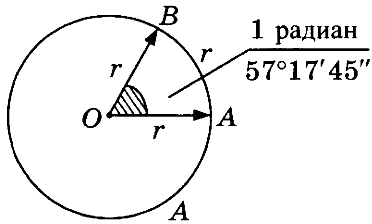
Радианная мера угла

Удобная градусная мера — *радиан*. Самая естественная мера расстояний или углов на окружности — ее собственный радиус. Так и решили поступить: если взять радиус окружности и прилепить к этой же окружности вдоль дуги, то получившийся угол и будет как раз 1 радиан. Обозначают радианы сокращенно *рад* или никак не обозначают, поскольку 1 радиан на окружности соответствует ровно 1 единице длины дуги. Поэтому, если длину измерять числами, то и углы — тоже.

---

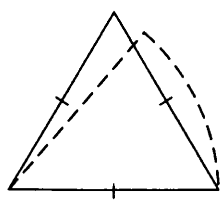
* Нужно учесть, что Земля вращается не совсем равномерно, а еще она поворачивается вокруг Солнца и совершает еще множество небольших вращательных движений. Поэтому и написано слово «примерно». Но отличие от 360° малое, поэтому мы не будем его учитывать.

Математики вообще считают, что длины, площади, объемы и углы — это все числа. Действительно, ведь математикам не важно, о чем речь — о метрах или километрах. Математикам удобно работать с числовыми величинами.



На рисунке изображен угол 1 *рад*. Получается как бы «равносторонний треугольник». Две стороны — радиусы, а третья сторона — дуга окружности той же длины.

Давайте прикинем, сколько градусов в радиане. Для этого мысленно «распрямим» изогнутую сторону. Получим обычный равносторонний треугольник с углом 60°. Значит, пока сторона не распрямилась, противолежащий угол должен быть немного меньше.



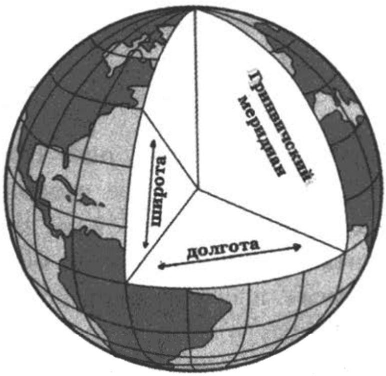
Вычислим точнее, сколько градусов в одном радиане. Полная окружность содержит 2π рад или 360°, что одно и то же. Поэтому

$$1\text{ рад} = \frac{360^\circ}{2\pi} \approx \frac{360^\circ}{2\cdot 3{,}1415926} = 57{,}2957795^\circ \approx 57^\circ 17' 45''.$$

Географические координаты

Как известно, Земля более-менее круглая (на стр. 98 об этом написано подробнее). А как мы видели, измерять расстояния по окружности — то же самое, что измерять углы. Поэтому общепринятые географические координаты на Земле являются мерами углов. *Широта* — угол, отсчитываемый от плоскости экватора к полюсу, и *долгота* — угол, отсчитываемый от Гринвичского меридиана на запад или на восток (вспомните очерк «Разница во времени» на стр. 21).

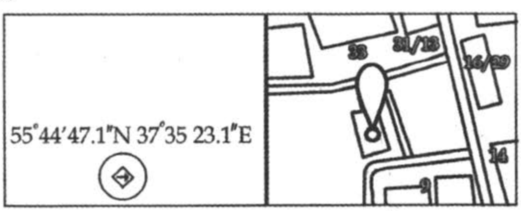
Линию, проходящую через точки на одной широте, называют *параллелью*. Линию, проходящую через точки на одной долготе, называют *меридианом*.



Долгое время считалось, что измерять углы с точностью до минут и секунд нужно только тем, кто имеет дело с расчетами курса судна, самолета или космического корабля. Но с внедрением в нашу жизнь систем глобального позиционирования GPS и ГЛОНАСС выяснилось, что ориентироваться в долготе и широте с точностью до секунд полезно всем.

Найти широту и долготу любого места сейчас очень просто, пользуясь интернетом.

На сайтах отелей, магазинов и т.п. очень часто в разделе «Как нас найти» указывают не только адрес, но и географические координаты. Зная координаты и имея навигатор, вы точно найдете нужное место, даже если нет хорошей карты.



Координаты здания в городе, найденного на Google-карте

Задача 106. На сколько раньше закат в Копенгагене, чем в Москве?

Решение. Найдем координаты городов. Копенгаген расположен на $55°40'$ СШ, $12°33'$ ВД, а Москва — на $55°45'$ СШ и $37°36'$ ВД. Воспользуемся тем, что широты городов близки, поэтому можно считать, что Копенгаген и Москва лежат практически на одной параллели. Это очень важно для нас, поскольку, если бы это было не так, задачу решить было бы гораздо труднее.

Найдем разность долгот: $37°36' - 12°33' = 25°03'$. Удобно перевести в десятичные доли градуса: $25° + \left(\frac{3}{60}\right)° = 25{,}05°$.

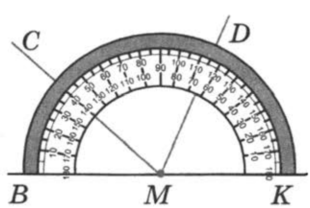
На такой угол земной шар поворачивается за $24 \cdot \frac{25{,}05}{360} = 1{,}67$ часа, то есть за 1 час и $60 \cdot 0{,}67 \approx 40$ минут.

Ответ: приблизительно на 1 час 40 минут.

Дополнительно заметим, что время Москвы UTC+3, а Копенгагена UTC+1, то есть разница во времени 2 часа. Но ведь мы помним, что это время назначено правительствами, а солнышку это безразлично. Оно зайдет в Москве, а через 1 час 41 минуту — в Копенгагене. Скажем, в Москве в 20.10, а в Копенгагене в 19.51, когда в Москве будет уже 21.51. Только очень внимательный турист, гуляющий по столице Дании, заметит, что темнеет минут на двадцать раньше, чем в Москве.

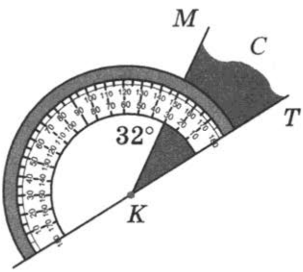
Измерение углов транспортиром

Транспортир — инструмент для измерения углов на плоскости. Он состоит из линейки и полуокружности (лимб), на которой отмечены углы в градусах. Центр полуокружности — метка (на рисунке точка M).



Чтобы измерить угол, нужно наложить линейку транспортира на одну из сторон угла так, чтобы метка совпала с вершиной угла, а другая сторона угла пересекла полуокружность с делениями.

На рисунке измерен угол TKM. Метка в точке K, линейка совмещена с прямой KT, луч KM пересекает лимб на делении 30°.



Часто для удобства на лимб наносят не одну шкалу, а две — одна навстречу другой.

Чтобы проверить, верно ли вы понимаете, что такое градус и хорошо ли работает ваш глазомер, решите задачу.

Задача 107. Без транспортира, на глаз, изобразите углы 5°, 20°, 60°, 90°, 130°. Проверьте себя с помощью транспортира.

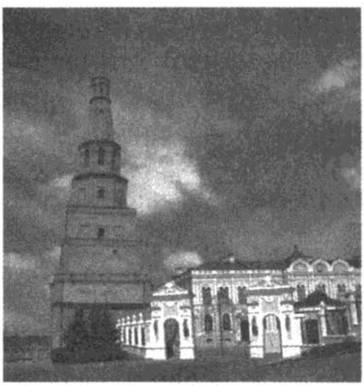
Это простое упражнение можно повторить несколько раз, а именно столько, сколько потребуется, чтобы ваша ошибка стала удовлетворительно малой. Скажем, для угла 5° ошибка не должна превышать 2°, а для угла 130° ошибку в 5° можно считать достаточно малой. Прямой угол 90° нужно уметь изображать с небольшой ошибкой, не превышающей 2–3 градусов.

На практике углы отмеряют от какого-нибудь выбранного направления. Важно только выбрать это направление так, чтобы все с этим согласились. В быту чаще всего нам приходится измерять углы наклона каких-либо конструкций. Например, столбов или перекладин, зданий или дорог.

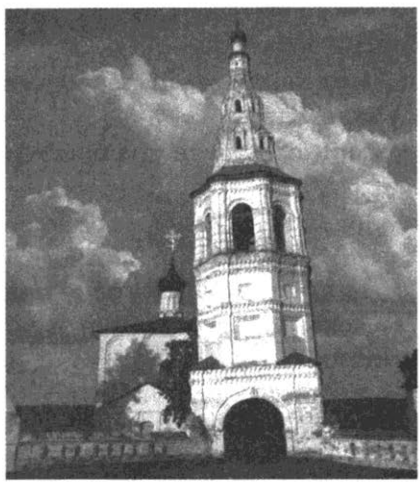
Предположим, что столб накренился. От какого направления мы будем отсчитывать наклон? Ни у кого не возникает сомнений — от вертикали. Таким образом, если нам скажут, что наклон башни 5,5°, мы легко себе это вообразим (см. рис.).

а) Пизанская башня (Пиза, Италия)

б) Церковь Сан-Мартино (о. Бурано, Венеция, Италия)



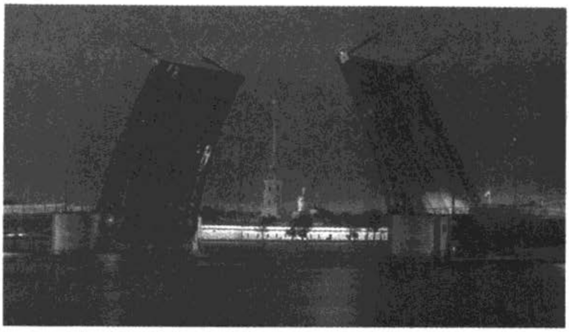
в) Башня Сююмбике в Казанском кремле



г) Колокольня в с. Кидекша Суздальского района

Задача 108. С помощью транспортира определите примерно наклон падающих башен на рис. а) — г).

Если же речь идет о наклоне моста, пола, перекладины, то есть того, что, по нашим понятиям, должно лежать горизонтально, то за нулевое направление мы, естественно, выбираем горизонталь.



Развод Дворцового моста в Санкт-Петербурге

На фото показан развод Дворцового моста в Санкт-Петербурге. Крылья моста поднимаются на угол 61°. Максимальный возможный угол развода — 69°.

Задача 109. С помощью транспортира найдите приближенно угол наклона поверхности моста по отношению к горизонтали.

Соотносится ли полученный вами результат с утверждением о том, что крыло моста поднимается на 61°? Если нет, подумайте, почему возможно такое несовпадение.

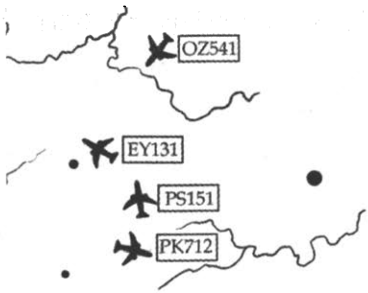
Курс и направление

Задача измерения углов всегда стояла перед путешественниками, потому что курс — это тоже угол. С тех пор, как первое судно оказалось вне видимости берегов, проблема определения курса встала перед человечеством во весь рост. И здесь тоже нужно выделенное направление.

По правилам аэронавигации, принятым в Европе и в России, курс самолета отсчитывается от магнитного меридиана. Проще говоря — нулевое направление показывает стрелка магнитного компаса. Отсчет ведется по часовой стрелке. Таким образом, курс на восток — примерно 90°, на юг — примерно 180°, а на запад — примерно 270°.

А вообще-то применяются два способа: отсчет от меридиана (направления на Северный полюс) и отсчет от направления магнитного меридиана (направления на магнитный северный полюс Земли).

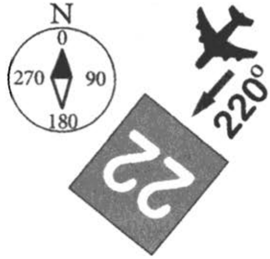
Задача 110. На рисунке показан фрагмент карты вблизи города Тарту (источник — сервис flightradar24). Видны четыре пассажирских самолета. С помощью транспортира определите приближенно курсы этих самолетов.



а) OZ541 (Сеул — Франкфурт);
б) EY131 (Абу-Даби — Вашингтон);
в) PS151 (Киев — Хельсинки);
г) PK712 (Нью-Йорк — Лахор).

Для обозначения взлетно-посадочных полос в аэропортах применяется остроумная система. Курс посадки на полосу делится на 10 и округляется. Полученное число используется как обозначение полосы. Когда наземный диспетчер сообщает пилоту номер полосы, он тем самым сообщает ему курс, которым самолет должен заходить на посадку. Пилот самолета, изображенного на рисунке, недавно получил команду садиться на полосу 22.

Учтем, что полоса используется с обоих концов в зависимости от направления ветра. Поэтому с другой стороны эта же полоса маркирована иначе. Если бы на рисунке самолет садился с противоположного конца, курс был бы $220° - 180° = 40°$. Значит, эта полоса имеет маркировку 22/04.



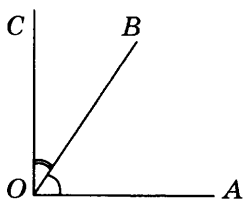
Задача 111. В аэропорту посадочная полоса с одной стороны имеет маркировку 07. Каким числом она промаркирована с другой стороны?

Развернутый угол. Смежные и вертикальные углы

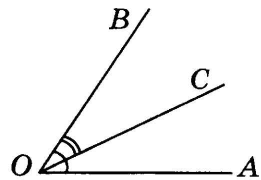
С величинами углов можно обращаться как с длинами. Их можно складывать и вычитать.

Задача 112. Пользуясь рисунком, найдите величину угла AOC, если $\angle AOB = 57°$ и $\angle BOC = 32°$.

а)

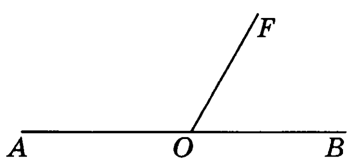


б)



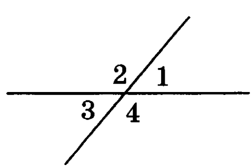
Задача 113. Известно, что $\angle DEF = 90°$, $\angle GEF = 130°$. Какие значения может принимать угол GED? Сделайте соответствующие рисунки.

Задача 114. На прямой AB выбрана точка O, а вне этой прямой — точка F, причем $\angle BOF = 60°$. Найдите угол AOF.



Указание. Используйте тот факт, что угол AOB *развернутый* и что его величина 180°.

Задача 115. Две прямые пересекаются в точке. Известен один из четырех получившихся в пересечении углов (см. рис.). $\angle 1 = 43°$. Найдите величины трех остальных углов.

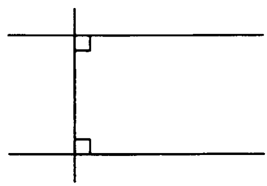


Решая предыдущую задачу, вы использовали две очевидные, но важные теоремы.

1. Сумма *смежных* углов равна 180° (на рисунке это, например, углы 1 и 2 или 2 и 3);

2. *Вертикальные* углы равны (на рисунке это углы 1 и 3 или 2 и 4).

Если две прямые образуют прямой угол 90°, то такие прямые называют *перпендикулярными*. Если две прямые на плоскости перпендикулярны одной и той же прямой, то такие две прямые *параллельны*, то есть не пересекаются (см. рис.).

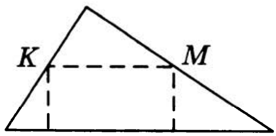


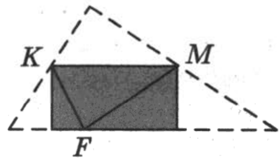
Треугольники

Треугольник устроен очень просто. Но количество присущих треугольнику свойств и их красота делают треугольник, пожалуй, самой удивительной из геометрических фигур. Если кратко описать в одной книге все сведения о треугольнике, известные к настоящему времени, получится увесистый том.

Сумма углов треугольника 180°. Это несложно доказать, но мы обещали, что обойдемся без доказательств.

Поясним это с помощью оригами. Возьмем бумажный треугольник. Повернем его так, чтобы сторона, к которой прилежат два острых угла (такая всегда найдется), оказалась снизу (см. рис.). Отметим небольшими складками середины двух сторон K и M и сделаем вертикальные сгибы через эти точки, завернув боковые вершины друг другу навстречу. Затем сделаем горизонтальный сгиб через эти же точки K и M, завернув верхнюю вершину вниз. Если все сделать аккуратно, то все три вершины встретятся в некоторой точке F на нижней стороне, а три угла полностью накроют развернутый угол, не налезая друг на друга. Значит, сумма углов 180°.





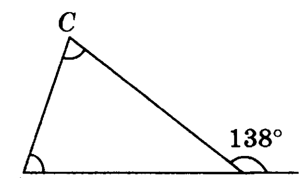
Задача 116. Два угла треугольника равны 43° и 72°. Найдите третий угол.

Решение. Сумма углов равна 180°. Поэтому третий угол равен $180° - 72° - 43° = 65°$.

Ответ: 65°.

Задача 117. Внешний угол треугольника *ABC* при вершине *B* равен 138°, а углы *A* и *C* равны между собой. Найдите угол *A*.

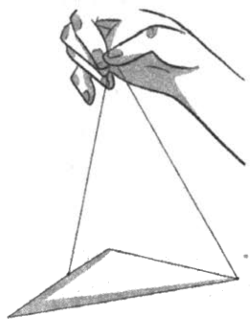
Указание. *Внешний* угол — это угол, смежный с внутренним углом треугольника. Значит, сумма внутреннего и внешнего углов при вершине *B* равна 180°, но и сумма всех трех внутренних углов 180°. Отсюда легко найти сумму внутренних углов *A* и *C*. Теперь осталось воспользоваться тем, что эти углы равны между собой.



Медианы, биссектрисы и высоты. Замечательные точки треугольника

Медиана треугольника — отрезок, соединяющий вершину с серединой противоположной стороны. У треугольника три вершины, значит, у него три медианы. Интересно, что медианы пересекаются в одной точке. Эта точка называется центром треугольника.

Пояснить этот удивительный факт можно физически. Предположим, что треугольник вырезан, например, из картона. Треугольник будет находиться в равновесии, если подвесить его за две точки — за вершину и середину противоположной стороны. Это означает, что центр масс (центр тяжести) треугольника находится где-то между этими двумя точками, то есть — на медиане. То есть любая медиана проходит через центр масс. Это и означает, что три медианы пересекаются в общей точке — центре масс треугольника. Слово «масс» математики отбрасывают и говорят просто: центр треугольника.



Центр треугольника делит каждую медиану на два неравных отрезка. Больший ровно в два раза длиннее.

Если провести все три медианы, то треугольник разбивается на шесть малых треугольников. Несложно понять, что площади всех этих шести треугольников равны. Подумайте, почему так.

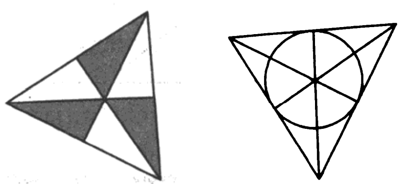


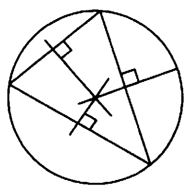
Рис. Точка пересечения медиан и шесть треугольников одинаковой площади (слева) и пересечение биссектрис в центре вписанной окружности (справа).

Биссектриса треугольника также выходит из вершины, но только делит пополам не сторону, а угол. Центр окружности, вписанной в треугольник, лежит на каждой из биссектрис. Поэтому биссектрисы также пересекаются в одной точке.

Точку пересечения биссектрис треугольника, то есть центр вписанной окружности, иногда называют красиво: инцентр треугольника. Точку пересечения высот называют ортоцентром. Точку пересечения серединных перпендикуляров к сторонам называют эксцентром. Эти три точки и еще центр треугольника часто называют четырьмя замечательными точками.

Высоты треугольника проводятся из вершин перпендикулярно к сторонам (или их продолжениям). Они тоже пересекаются в одной точке. Этот факт немного сложнее объяснить, поэтому не будем.

В треугольнике множество интересных точек. Расскажем еще про одну. Центр описанной окружности, то есть окружности, проходящей через все три вершины, является точкой пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.



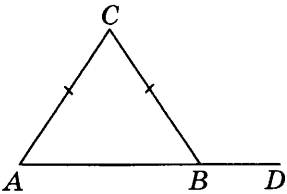
Равнобедренный и равносторонний треугольники

Если у треугольника две стороны равны, то такой треугольник называют *равнобедренным*. Равные стороны — «бедра» — называют боковыми, а третью сторону называют основанием. Целая путаница возникает, если равны все три стороны. В этом случае треугольник называют *равносторонним*, но одновременно он равнобедренный. Любую сторону можно считать боковой, любую сторону можно сделать основанием.

Проверено, что если школьнику задать вопрос — является ли равносторонний треугольник равнобедренным, то примерно в половине случаев выпускник, не ожидавший такого подвоха, утверждает, что нет. Досадно, конечно. Ведь если три стороны равны, то две тоже равны. Но нам кажется, что без таких вопросов можно обойтись. Гораздо важнее уметь решать простые задачки, чем копаться в философии на тему, что чем является или не является.

У равнобедренного треугольника равны углы при основании. У равностороннего треугольника по этой причине равны все три угла. В сумме они дают 180°, и поэтому каждый из них 60°.

Задача 118. В треугольнике ABC стороны AC и BC равны. Внешний угол при вершине B равен 122°. Найдите угол C. Ответ дайте в градусах.



Решение. Легко найти угол B. Поскольку треугольник равнобедренный, угол A будет равен углу B. Зная углы A и B, несложно найти угол C.

$\angle A = \angle B = 180° - 122° = 58°$.

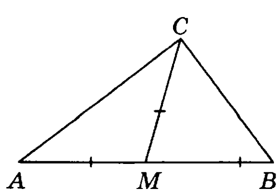
Следовательно, $\angle C = 180° - 2 \cdot 58° = 180° - 116° = 64°$.

Ответ: 64°.

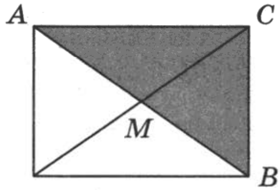
Прямоугольный треугольник

У треугольника не может случиться так, что два угла прямые — по 90°. Зато один угол может быть прямым. Такой треугольник называют *прямоугольным*, и он имеет интересные свойства. И не только в связи с теоремой Пифагора. Совершенно особенным образом ведут себя медиана, биссектриса и высота, проведенные к гипотенузе.

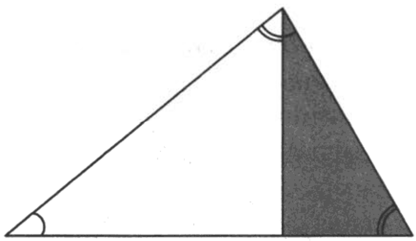
Во-первых, медиана равна половине гипотенузы. Поэтому она разбивает прямоугольный треугольник на два равнобедренных треугольника. И по этой же причине середина гипотенузы служит центром описанной окружности.



Почему так получается, легко видеть на следующем рисунке, где прямоугольный треугольник изображен как половина прямоугольника.

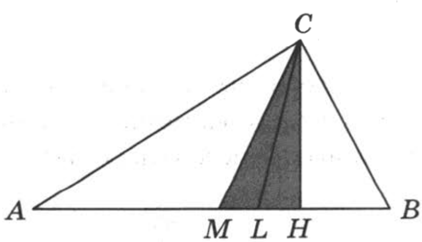


Во-вторых, высота разбивает прямоугольный треугольник на два прямоугольных треугольника, которые подобны друг другу, то есть имеют одинаковую форму, но разные размеры.



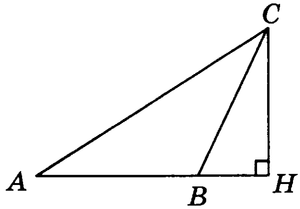
Причем эти два треугольника подобны не только друг другу, но и большому треугольнику тоже.

Ну, и в-третьих, биссектриса является не только биссектрисой самого треугольника, но и биссектрисой маленького треугольника, ограниченного медианой и высотой. Попробуйте сами понять, почему так получается.



Уже этих, весьма неглубоких, знаний о прямоугольном треугольнике достаточно, чтобы успешно решать многие задачи базового и профильного экзамена.

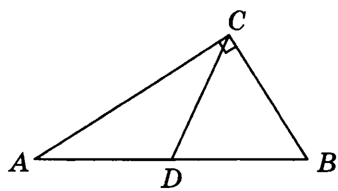
Задача 119. В треугольнике ABC угол A равен 30°, CH — высота, угол BCH равен 22°. Найдите угол ACB.



Решение. Треугольник ACH получился прямоугольный. Сумма его острых углов CAH и ACH рана 90°, а поэтому угол ACH равен $90° - 30° = 60°$. Теперь легко найти угол ACB: $60° - 22° = 38°$.

Ответ: 38°.

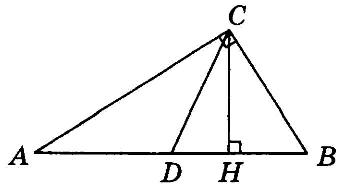
Задача 120. В треугольнике ABC угол ACB равен 90°, угол B равен 58°, CD — медиана. Найдите угол ACD.



Решение. Мы помним, что медиана, проведенная к гипотенузе, разбивает треугольник на два равнобедренных треугольника ACD и BCD. Следовательно, угол BCD равен углу CBD, то есть также 58°. Значит, угол ACD равен $90° - 58° = 32°$.

Ответ: 32°.

Задача 121. Один из углов прямоугольного треугольника равен 29°. Найдите угол между высотой и биссектрисой, проведенными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.



Решение. 29° — это меньший из острых углов, то есть угол A, если судить по рисунку. Но тогда угол BCH также 29°. Угол BCD равен 45° как половина прямого угла. Следовательно, искомый угол между CH и CD равен $45° - 29° = 16°$.

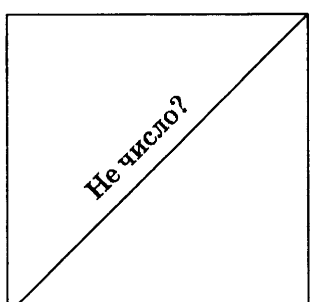
Ответ: 16°.

Теорема Пифагора

Математик и историк математики Эрик Темпл Белл писал, что Пифагор — на девять десятых выдумка и только на одну десятую реальность. Как бы там ни было, современные исследователи сходятся в том, что теоремой Пифагора мы обязаны пифагорейцам — некоторой почти тайной ложе, члены которой занимались этическими, мистико-математическими спекуляциями. Пифагорейцам приписывают лозунг «все есть число». При этом под числом Пифагор и его последователи понимали сугубо целые числа и их отношения, то есть дроби. Можно было представить удивление Пифагора или кого-то из его последователей, когда он обнаружил, что диагональ квадрата со стороной 1 в этом смысле не выражается числом.

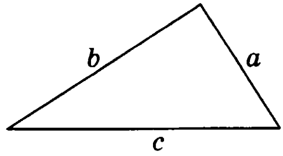
Подробно этот факт обсуждается в справочнике. Там мы нарушаем данное слово и все же доказываем, что диагональ квадрата, равная $\sqrt{2}$, не выражается дробью.

1 — число



Удивление пифагорейцев

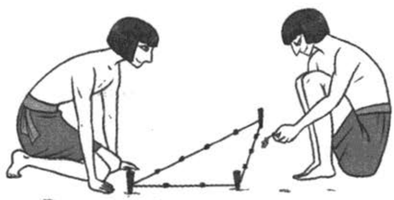
Что же утверждает теорема Пифагора? Если мы знаем катеты a и b прямоугольного треугольника, то можем найти гипотенузу c из равенства $c^2 = a^2 + b^2$.



$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Доказательство теоремы Пифагора мы приводим в справочнике.

Наверное, этот факт действительно обнаружил Пифагор или кто-то из пифагорейцев. Однако известно, что задолго до пифагорейцев теорема Пифагора без всякого доказательства использовалась в строительных работах. Например, для того, чтобы построить прямой угол, древнеегипетские строители использовали бечевку, разбитую узелками на 12 равных отрезков. Если вбить в землю колышки так, чтобы получился треугольник, у которого стороны 3, 4 и 5 таких отрезков, то получается прямоугольный треугольник, а значит — прямой угол.



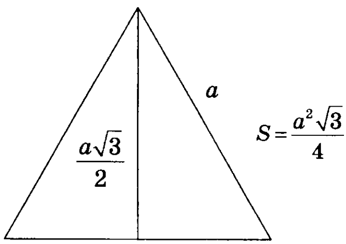
Построение прямого угла на местности с помощью египетского треугольника

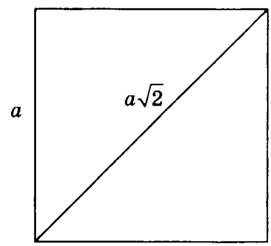
Видимо, из-за древней практики с узелками треугольник со сторонами 3, 4, 5 называют египетским. Но такой треугольник не один. Если стороны прямоугольного теругольника выражены тремя целыми числами, то такую тройку чисел называют пифагоровой тройкой. Пифагоровых троек бесконечно много. Первая, как мы знаем (3, 4, 5). Вот еще: (5, 12, 13) или (8, 15, 17). Есть способ получить любую пифагорову тройку. Возьмем какие-нибудь целые числа n и m (пусть $m > n$). Числа $m^2 - n^2$, $2mn$ и $m^2 + n^2$ образуют пифагорову тройку. Если, например, $n = 1$, а $m = 2$, то получаем: $m^2 - n^2 = 4 - 1 = 3$, $2mn = 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$ и $m^2 + n^2 = 4 + 1 = 5$. В качестве развлечения попробуйте подобрать m и n для пифагоровых троек (5, 12, 13), (7, 24, 25) и (20, 21, 29). Можно найти общий способ.

Два важных факта

Из теоремы Пифагора легко вывести важные свойства равностороннего треугольника и квадрата, которые очень часто полезны при решении задач. Если их помнить, то на экзамене можно сэкономить несколько драгоценных минут.

1. Если сторона равностороннего треугольника равна a, то его медиана (биссектриса, высота) равна $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, а площадь равна $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.





2. Диагональ квадрата в $\sqrt{2}$ раз длиннее стороны квадрата.

Связь между сторонами и углами в треугольнике

А что делать, если треугольник не прямоугольный и не равносторонний? Какие соотношения верны для любого треугольника? Например, *теорема косинусов*:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

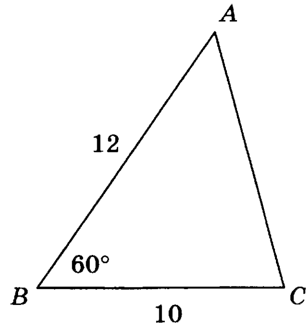
Если внимательно посмотреть на это равенство, то можно заметить, что оно похоже на теорему Пифагора, только в конце добавляется еще одно слагаемое с косинусом, которое возникает тогда, когда угол C не прямой. Теорема косинусов «реализует» признак равенства треугольников «по двум сторонам и углу между ними». Если две стороны и угол между ними известны, то однозначно вычисляется третья сторона.

Эта же самая теорема косинусов «отвечает» и за признак равенства «по трем сторонам». Если мы перепишем формулу иначе:

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab},$$

то она говорит, что если есть три стороны, то легко найти угол.

Задача 122. В треугольнике ABC известны стороны $AB = 12$, $BC = 10$ и угол B равен $60°$. Найдите сторону AC.



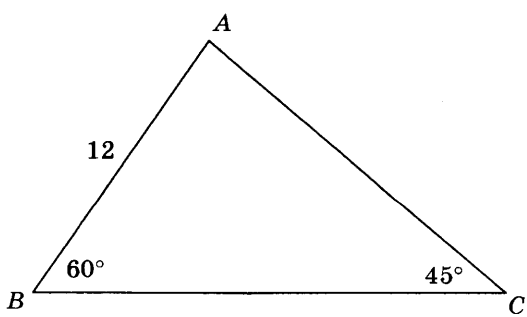
<u>*Указание:*</u> напрямую применяется теорема косинусов.

А есть ли теорема, «отвечающая» за второй признак равенства треугольников — по стороне и двум прилежащим углам? Есть. Теорема синусов:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Если известна сторона a и два каких-нибудь угла (а значит, и все три), то из пропорций можно найти другие стороны.

Задача 123. В треугольнике ABC известна сторона $AB = 12$, угол B равен $60°$, угол C равен $45°$. Найдите сторону AC.



<u>*Указание:*</u> напрямую применяется теорема синусов. Из равенства $\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B}$ нужно выразить сторону AC.

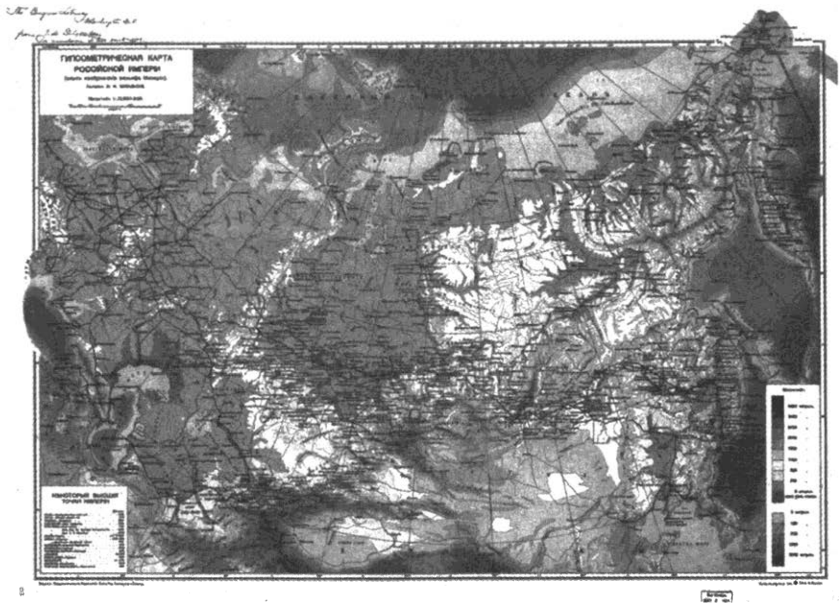
Триангуляция в геодезии и картографии

Наверняка вы видели в книгах изображения географических карт, составленных несколько веков назад. Они производят впечатление художественных шедевров, но, вместе с тем, вряд ли кто-то будет спорить, что ориентироваться по этим картам нельзя: точность изображения на этих картах довольно низкая. Так происходит, во-первых, оттого, что древние картографы применяли непривычные нам проекции (способы изображения выпуклой поверхности Земли на плоском листе). Ведь современные картографические проекции появились только в XVIII веке.

А во-вторых, очень много искажений. Ведь непросто нарисовать то, что не видишь. Ну как древний картограф мог точно изобразить Москву или Европу? Он же не мог «рисовать с натуры» — для этого нужно было подняться высоко над землей, чтобы увидеть сверху большой участок и точно перенести его на карту. Посмотрите на карту России, изданную в 1614 году. Вряд ли такую странную форму Каспийского моря или Кольского полуострова можно объяснить только непривычностью проекции.

Карта России, изданная в Амстердаме в 1614 году по чертежам, сделанным в 1605 году Федором Борисовичем Годуновым — русским царем и по совместительству — картографом

Тем не менее в XIX веке появляются весьма точные карты больших пространств.



Карта Российской Империи, 1914 год. Картограф Ю.М. Шокальский

Как же картографы XIX века научились создавать точные карты? Ведь у них по-прежнему не было ни самолетов, ни даже аэростатов, чтобы делать аэрофотосъемку.

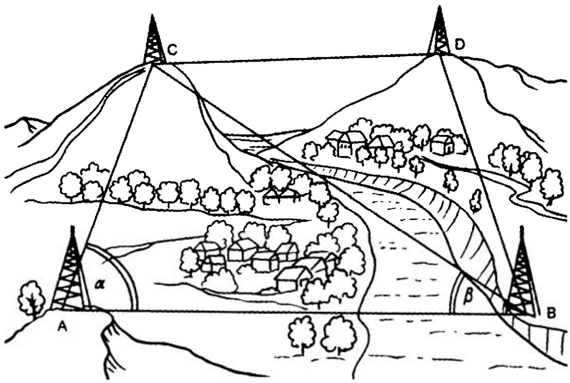
На помощь пришли школьные теоремы косинусов и синусов. Еще в XVI веке был придуман метод триангуляции*. Идея очень проста. Нужно поставить много триангуляционных вышек (*тригонометрических знаков*) так, чтобы с каждой вышки было видно соседние. В качестве природных вышек удобно использовать вершины гор или сопок, шпили башен или церквей.

Три вышки образуют треугольник. Между некоторыми вышками расстояние можно измерить непосредственно. А главное — стоя на вышке, геодезист может измерить угол между направлениями на две соседние вышки. Таким образом, стороны некоторых треугольников и углы в них известны точно. Теперь с помощью геометрии можно вычислять другие стороны и углы. А зная их — дальше и дальше. Так вся местность

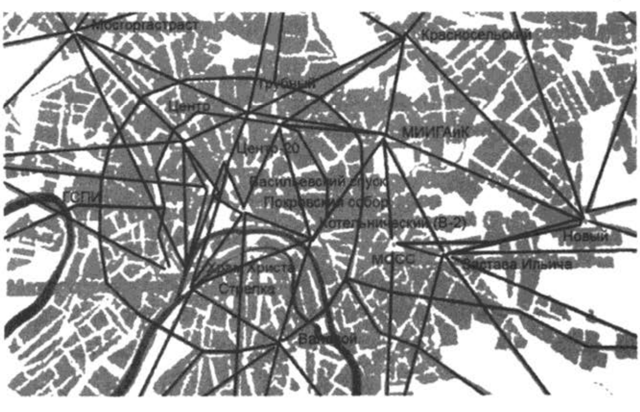
* Триангуляция переводится как разбиение на треугольники.

покрывается сетью треугольников, про которые известно все. Теперь остается привязать к этой сетке береговые линии, дороги, здания. Например, если нужно знать точные координаты дома, достаточно измерить углы между направлениями от этого дома на две-три вышки. Если координаты вышек уже известны — дальше дело тригонометрических вычислений.

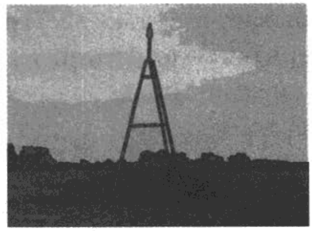
Сказать легко. А вот сделать... На самом деле треугольники не лежат в одной плоскости, а следуют изменчивости рельефа, забираясь в горы и опускаясь в ущелья и долины. Триангулировать моря тоже непросто.



Триангуляция местности. Измеряя расстояния от одной вышки до другой и углы между направлениями, можно постепенно определить координаты вышек, а затем — любого объекта и нанести все на карту



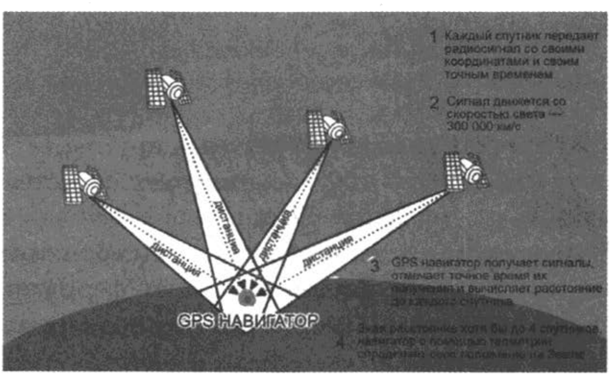
Система тригонометрических знаков в Москве



Тригонометрические знаки. Их сохранилось много

Современные методы картографии основаны на аэро- и космической съемке. Казалось бы, значение геометрических методов в картографии снизилось, а геометрия почти перестала заниматься измерениями местности. Но недавно появились глобальные системы позиционирования с помощью спутников — GPS, ГЛОНАСС. И геометрия снова вернулась к своему первоначальному занятию — измерению Земли.

Спутниковая навигация очень похожа на триангуляцию. Роль вышек играют спутники, а расстояния от них ваш навигатор вычисляет по времени, в течение которого радиосигнал находится в пути от спутника к вам. Навигатор должен знать абсоютно точное время в точке, где находится он сам, получить абсоютно точное время и координаты каждого спутника, учесть разницу во времени между всеми точками и все поправки, возникающие в связи с неравномерностью вращения Земли, влиянием Луны и т.п. А затем — вычислить ваши координаты и показать на экране. Чтобы все это стало возможным, требуется очень точная система измерения времени. (См. очерк о том, что такое универсальное время UTC на стр. 22.)



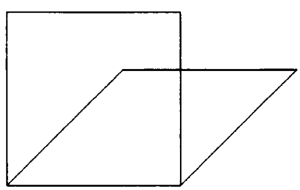
Треугольники и четырехугольники в механике

Жесткость треугольника

Одно из замечательных свойств треугольника — его *жесткость* — полезно в технике и в строительстве. Что значит жесткость треугольника? Помните признак равенства треугольников по трем сторонам? Обычно он выглядит так: *если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.*

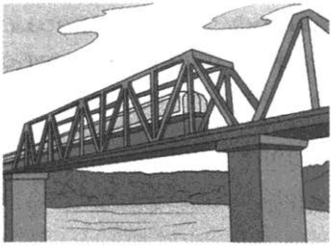
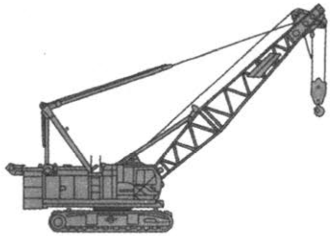
Это можно сформулировать короче: *если у двух треугольников стороны равны, то треугольники одинаковы.*

Или совсем коротко: *стороны треугольника определяют его форму.* Это означает, что треугольник нельзя сложить или согнуть или еще как-то деформировать, не изменив его стороны. Четырехугольник можно, а треугольник нет. На рисунке показано, как квадрат складывается, а стороны при этом невредимы. С треугольником такого не сделаешь, не повредив сторон.

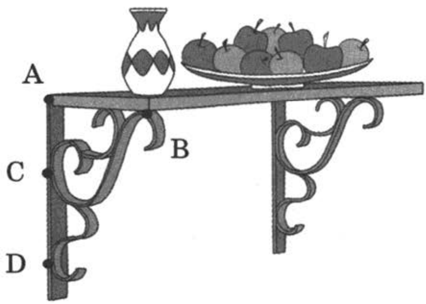


Квадрат можно сложить,
при этом стороны останутся параллельными

Если треугольник сделан из стальных прутов, то, конечно, их можно согнуть, и весь треугольник тоже согнется. Но для этого требуется большая сила. Если нужно получить прочную, но легкую конструкцию, ее делают в виде серии треугольников. Такие конструкции иногда называют фермами. На рисунках железнодорожный мост и подъемный кран. Видите фермы из треугольников?

Даже в обычные кронштейны для полок обычно добавляют перекладину так, чтобы получился треугольник. Такая перекладина называется укосиной. Иногда ее делают причудливой формы, но все же главное — получить треугольник.



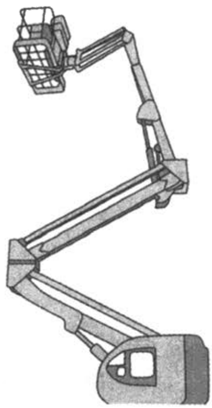
Фигурная укосина и получившиеся треугольники, дающие жесткость

Покладистость параллелограммов

Свойства *параллелограмма* тоже интересны с точки зрения механики. Но если ценность треугольника в жесткости, то параллелограмм интересен как раз благодаря способности складываться. Эта способность иногда приводит к тому, что ножки столика подгибаются в самый неподходящий момент.

Хорошо видны три параллелограмма

Но «шаткость» параллелограмма можно применять с пользой. Еще в позапрошлом веке придуманы шарнирные механизмы с параллелограммом в основе. Если одна сторона параллелограмма закреплена горизонтально, то, как ни складывать параллелограмм, противоположная сторона также будет горизонтальна. Это свойство применяется в разнообразных подъемных механизмах, где важно не уронить груз.



Как бы этот подъемник ни двигал стрелу в разные стороны, пол люльки останется горизонтальным

Самый полезный из этих механизмов, наверное, — это механизм столика, который встроен в спинку самолетного кресла. Если бы не он, то на сидящего сзади пассажира выливался бы кофе каждый раз, когда сидящий впереди задумал бы откинуться в кресле.

Ромб — тоже параллелограмм. У него равны все четыре стороны и диагонали перпендикулярны.

Прямоугольник — тоже параллелограмм. У него диагонали равны, а все углы прямые.

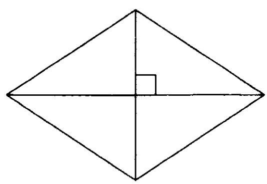
Квадрат — одновременно прямоугольник и ромб.

Как правильно построить сарай?

Кому из взрослых мужчин не приходилось строить у себя на участке сарай или навес? Если участок есть, то приходилось. Главное — правильно начать. Обычно контуры будущей постройки намечают с помощью колышков и веревочек (лучше использовать нерастяжимую веревку из полиэтиленовых волокон).

Предположим, что мы хотим возвести сарай длиной 5 м и шириной 3 м. Отмерить с помощью рулетки нужные отрезки веревки несложно. Несложно вбить колышки. В результате получается четырехугольник. Две малые стороны по 3 м, две большие — по 5 м. Этого достаточно, чтобы утверждать, что мы получили параллелограмм. Но ведь нам нужен прямоугольник. Как быть? Как отмерить прямой угол? Мы знаем несколько свойств разных фигур, которые позволят нам это сделать.

1. Египетский треугольник? (См. «Прямоугольный треугольник» на с.73). Но здесь кроется непредвиденная трудность. Очень непросто завязать на веревке 12 узелков на абсолютно одинаковом расстоянии друг от друга. Можно попробовать навязывать узелки, сделанные из другой веревки, или еще как-то. Сложно...
2. Перпендикулярность диагоналей ромба? Можно сделать большой ромб из четырех одинаковых планок и затем... куда-то его прикладывать... Сложно...



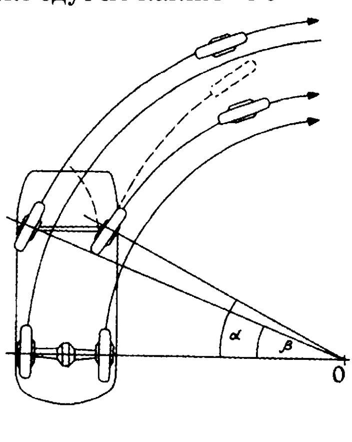
3. Равные диагонали прямоугольника? Отличный способ. Вообще ничего хитрого не нужно. Сначала воткнем колышки в землю, чтобы получились примерно прямые углы. Теперь натянем две диагонали и будем немного переставлять какие-нибудь два противоположных колышка, добиваясь равенства этих диагоналей. За две-три попытки добьемся очень хорошей точности.

Можно подойти к делу «еще более научно». Теорема Пифагора говорит (проверьте), что у прямоугольника со сторонами 5 и 3 м каждая диагональ должна равняться 5 м 83 см. Если отмерить веревку такой длины, то сначала можно разметить прямоугольный треугольник, а уже затем достроить его до прямоугольника, вбив четвертый колышек. После этого вторая диагональ тоже должна получиться 5 м 83 см. Один из авторов этой книги каждый раз убеждался, что это не так. В жизни колышки, веревки и рулетки не хотят сразу подчиняться геометрии. Требуется настойчивость. Обычно приходится и отмерять, и выравнивать, и все это не по одному разу.

Трапеция рулит

Трапеция не треугольник: жесткостью не отличается. Трапеция не параллелограмм: не сохраняет параллельность сторон. В целом все плохо. Но трапеция оказалась незаменима в одном важном механизме.

Все более-менее понимают, как автомобиль поворачивает. Водитель крутит руль, передние колеса поворачиваются. И все происходит так мягко и ловко... На песке остаются четыре четких красивых следа. Но, посмотрев на эти следы, поневоле задумаешься. Ведь если автомобиль поворачивает направо, то правое колесо едет по окружности меньшего радиуса, чем левое. А задние колеса тоже едут по каким-то своим окружностям.



И хорошо было бы, чтобы все окружности имели общий центр, а иначе какие-то колеса начнут проскальзывать, резина будет гореть, металл — ломаться, машина — дергаться... Как же все это обеспечить? И вот здесь пригодились свойства трапеции.

В рулевом механизме автомобиля четыре основные детали. Только они образуют не параллелограмм, а трапецию. Трапеция подобрана так, чтобы при повороте все колеса оказывались под нужными углами и оси всех четырех колес были бы направлены в одну точку — центр поворота.

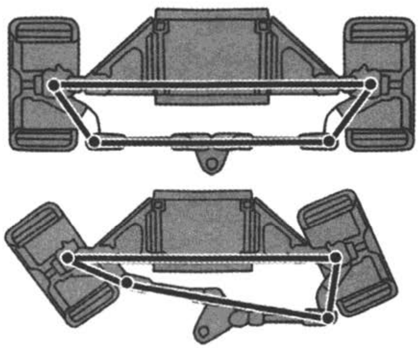


Схема работы рулевой трапеции. Автомобиль поворачивает налево. Угол поворота левого колеса больше, чем правого. Если поворот правый, то все наоборот

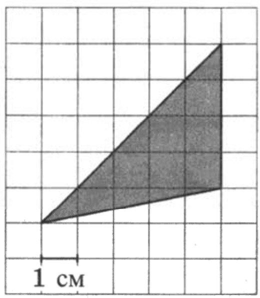
Когда-то давным-давно авторы учебников по геометрии прекрасно понимали, зачем нужны знания о трапеции или параллелограмме, но считали, что рассказ про автомобили и прямоугольные сараи — не дело школьных учебников. Наверное, зря они так считали. Математическая составляющая нашей жизни велика и удивительна, но не очень заметна. А разве можно с интересом изучать то, от чего не видишь ни пользы, ни радости?

Глава 5. ПЛОЩАДИ И ОБЪЕМЫ

Площади фигур на клетчатой бумаге

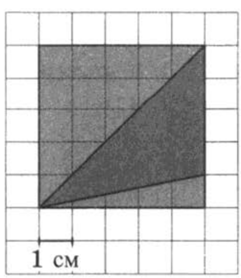
Если фигура устроена не очень сложно, то найти ее площадь часто удается, достроив подходящие вспомогательные фигуры. Например, удобно использовать прямоугольники или прямоугольные треугольники.

Задача 124. Найдите площадь треугольника, изображенного на клетчатой бумаге.



Решение. 1-й способ. Поместим треугольник в прямоугольник, нарисованный по клеточкам. Получается квадрат 5×5. Площадь квадрата найти несложно: $5 \cdot 5 = 25$. Теперь нужно удалить два лишних треугольника. Большой треугольник — ровно половина квадрата. Его площадь $25 : 2 = 12{,}5$. Маленький треугольник — ровно половина прямоугольника, 5×1. Значит, его площадь равна $5 : 2 = 2{,}5$. Вычитаем эти площади из 25:

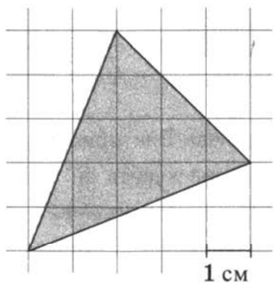
$$25 - 12{,}5 - 2{,}5 = 10.$$



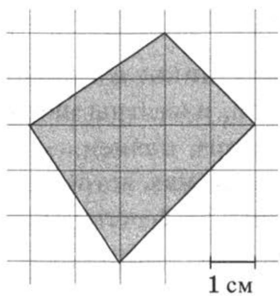
2-й способ состоит в том, чтобы воспользоваться формулой $S = \frac{1}{2}ah$, где a — какая-то сторона, а h — высота, проведенная к этой стороне. Если принять вертикальную сторону за a, получаем: $a = 4$, $h = 5$. Площадь равна $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 = 10$.

Ответ: 10.

Задача 125. Попробуйте найти площадь треугольника достраиванием до прямоугольника и отбрасыванием лишнего.



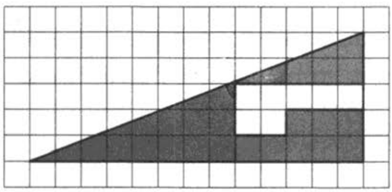
Задача 126. Найдите площадь четырехугольника.

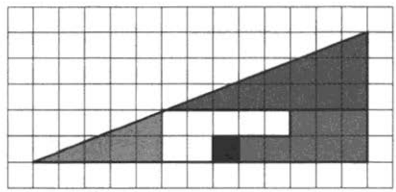


Указание. Можно достроить до прямоугольника и затем «выкинуть четыре лишних куска», а можно четырехугольник одной горизонтальной линией разделить на два треугольника, площади которых посчитать несложно. Попробуйте оба способа.

Найти площадь фигуры можно, как правило, несколькими способами. Это удобно для проверки. Если два или три способа дают разные результаты, нужно искать ошибку. Но главное — прикидка.

Вот знаменитая задача-шутка. Задачу придумал известный английский математик Чарльз Лютвидж Доджсон. Более широко он известен как Льюис Кэрролл — автор сказок «Алиса в Стране чудес». Два одинаковых прямоугольных треугольника сложены из одинаковых фигур. Но во втором есть «лишняя» клетка. Как такое возможно?

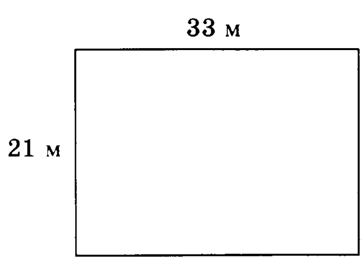




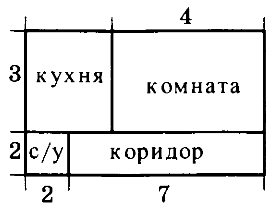
Есть легенда, что когда королева Виктория прочла сказку про Алису, она пришла в восторг и потребовала купить ей все сочинения этого великого фантазера. Приказание было выполнено — ей принесли толстую пачку книг по математике. Наверное, это только легенда — ведь пока Доджсон писал книжки по математике, Кэррол написал не так уж мало стихотворений и коротких рассказов и даже книгу «Дневник путешествия в Россию 1867 г.». Правда, дневник был издан только после смерти автора.

В отличие от треугольников и трапеций, площади комнат и участков, как правило, известны из планов БТИ (бюро технической инвентаризации), планов застройки и т.п. К сожалению, ошибки в этих планах встречаются часто. Наверное, потому, что специалисты БТИ — люди, и им свойственно иногда делать математические ошибки.

Задача 127. Вычислите площадь участка по данным рисунка.



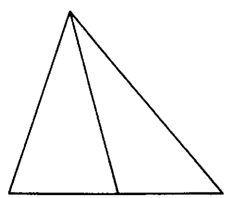
Задача 128. Вычислите площадь квартиры по данным рисунка. Все размеры даны в метрах.



Сравнение площадей

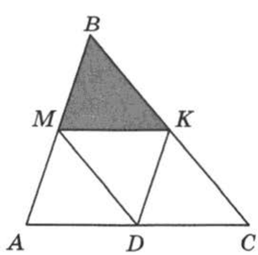
Иногда площади удается легко сравнить. Удобнее всего видеть части площадей в обычном треугольнике или параллелограмме.

Медиана разбивает треугольник на два треугольника, равных по площади (равновеликих).



Задача 129. В треугольнике ABC отрезок CM — медиана. Площадь CMA равна 7. Найдите площадь треугольника ABC.

Задача 130. В треугольнике ABC точка M — середина AB, а точка K — середина BC. Во сколько раз площадь MKB меньше площади треугольника ABC?

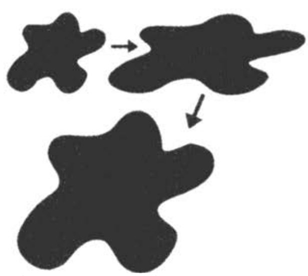


Чтобы понять, во сколько раз площадь треугольника MKB меньше площади треугольника ABC, достаточно рассмотреть рисунок, на котором точка D — середина AC и треугольник ABC оказался разрезанным на 4 одинаковых треугольника.

Задача 131. Во сколько раз уменьшится площадь треугольника, если все его размеры уменьшатся в три раза?

Изменение площадей и объемов при изменении размеров фигур (при подобии)

Описанные в трех предыдущих задачах законы изменения площадей не зависят от формы фигуры. Если фигуру совершенно произвольной формы увеличить вдвое (по длине и ширине), то ее площадь вырастет в 4 раза. Пояснить это обстоятельство можно рисунком. Сначала фигура растягивается вдвое по ширине: а потом — по высоте. Каждый раз ее площадь увеличивается в 2 раза. Итого — в 4 раза.

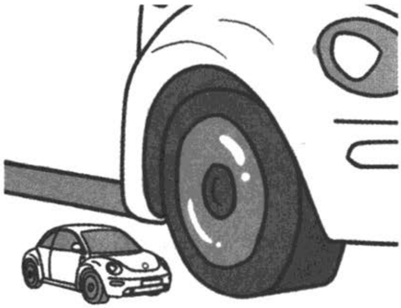


Если размеры увеличиваются в m раз, то площадь растет в m^2 раз. Например, в одном километре 1000 метров. Это значит, что в одном квадратном километре $1000^2 = 1\,000\,000$ (миллион) квадратных метров.

С объемами дело обстоит похожим образом. Если тело (фигуру в пространстве) увеличить вдвое (по длине, ширине и высоте), то площадь поверхности увеличится в 4 раза, а объем — в 8 раз.

В магазинах продаются коллекционные модели автомобилей. Они точно повторяют форму оригинала.

Задача 132. Какой длины должна быть модель автомобиля, если она в точности повторяет в масштабе 1:30 автомобиль длиной 5 м 10 см?



Решение. 5 м 10 см это ровно 510 см. 510 : 30 = 17 (см).

Ответ: 17 см.

Задача 133. Сколько должна была бы весить такая модель (см. задачу 132), если бы она повторяла оригинал не только внешне, но и во всех деталях, включая материалы? Считайте, что вес настоящего автомобиля 1200 кг.

Решение. Настоящий автомобиль ровно в 30 раз длиннее, шире и выше своей игрушечной копии. «Сожмем» автомобиль в 30 раз по длине, затем — по ширине и, наконец, — по высоте. Всего он «сожмется» в $30 \cdot 30 \cdot 30 = 27\,000$ раз. Во столько раз должна уменьшиться масса:

$$1200 : 27\,000 = \frac{4}{90} \text{ (кг)} \approx 44{,}4 \text{ (г)}.$$

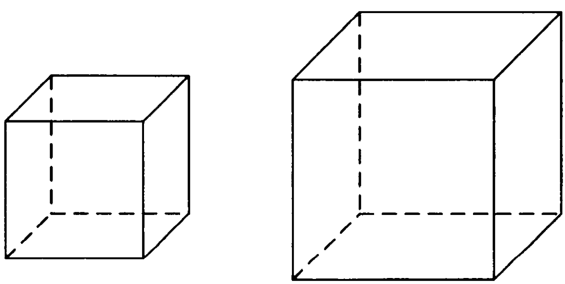
Ответ: 44 грамма.

Игрушечный, но «как настоящий» автомобильчик длиной 17 см должен весить примерно 44 грамма. Но в реальности такая модель весит гораздо больше — примерно 150–200 г. Как объяснить такой парадокс?

Задача 134. Средний* танк Т-34 весит 26 тонн. В магазине продается металлическая модель танка в масштабе 1:20. Сколько килограммов должна была бы весить такая модель, если бы она абсолютно точно повторяла все детали настоящего танка?

Площадь и объем фигуры зависят от ее размеров и формы. Но если форма неизменная, то площадь поверхности растет пропорционально квадрату размеров фигуры, а объем — пропорционально кубу. Если вдуматься, ничего удивительного нет: площадь измеряется в квадратных единицах, а объем — в кубических.

«Глазомерная оценка» площадей и объемов требует навыка. Без подготовки в оценке площади легко ошибиться. На рисунке два кубика. Один больше другого. Предположим, что объем малого куба равен 1000 куб. см. Попробуйте прикинуть объем большего куба.

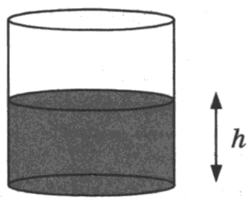


* Средний танк — это не в смысле, что мы рассматриваем какой-то усредненный танк. До шестидесятых годов XX века танки классифицировались по мощности брони и вооружения. Были танки легкие, средние и тяжелые.

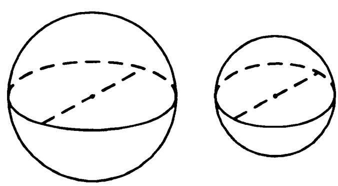
Если ваш ответ: меньше 2000 куб. см, то вы ошиблись — подвел глазомер, который умеет хорошо оценивать изменение размеров, но не объемов. Примерно так же плохо дела обстоят и с глазомерной оценкой площадей.

Задачи

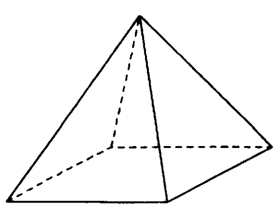
Задача 135. Уровень воды в сосуде цилиндрической формы достигает $h = 20$ см. Какого уровня будет достигать вода, если ее перелить в другой такой же сосуд, у которого радиус основания в полтора раза меньше, чем у первого? Ответ дайте в сантиметрах.



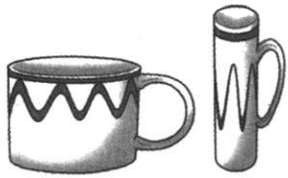
Задача 136. Однородный шар диаметром 3 см весит 81 грамм. Сколько граммов весит шар диаметром 2 см, изготовленный из того же материала?



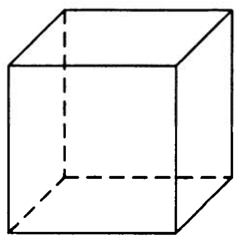
Задача 137. Пирамида Хеопса имеет форму правильной четырехугольной пирамиды, сторона основания которой равна 230 м, а высота — 147 м. Сторона основания точной музейной копии этой пирамиды равна 46 см. Найдите высоту музейной копии. Ответ дайте в сантиметрах.



Задача 138. Две кружки имеют цилиндрическую форму. Первая кружка втрое шире второй, а вторая — в полтора раза выше первой. Во сколько раз объем первой кружки больше объема второй?



Задача 139. Во сколько раз увеличится объем куба, если все его ребра увеличить в пять раз?



Карты и масштабы.
Что больше — Гренландия или Австралия?

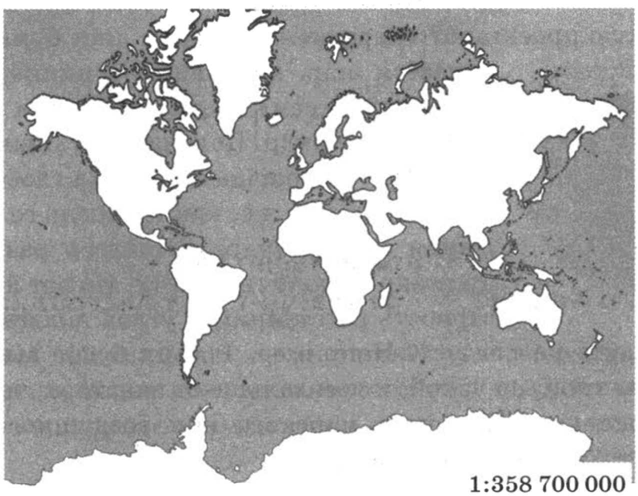
К географическим картам все привыкли. Все понимают, как пользоваться ими, и понимают, что такое масштаб. На самом деле географическая карта полна неожиданностей, связанных с искажением масштаба.

В XVII в. обнаружилось, что маятниковые часы на экваторе ходят медленнее, чем в Париже. Сэр Исаак Ньютон объяснил это тем, что на экваторе сила тяжести меньше, чем вблизи полюсов, и Земля немного «сплюснута» с полюсов, своей формой напоминая мандарин. Ньютон даже примерно прикинул, насколько расстояние от центра Земли до полюса меньше, чем до экватора.

Французская академия наук поручила проверить правильность рассуждений Ньютона директору Парижской обсерватории Джованни Кассини. После подсчетов Кассини объявил, что Ньютон не прав: Земля не сплюснута, как мандарин, а вытянута, как лимон. Ньютон стоял на своем. Ученый спор длился долго.

В 1735 г. были снаряжены две экспедиции. Одна — в Перу, другая — в Лапландию. После обработки результатов выяснилось, что Земля все же больше похожа на мандарин, чем на лимон. Ньютон оказался прав. Занятно другое — в своих расчетах Кассини ошибался меньше, чем Ньютон.
Возможно, описывая войну тупоконечников и остроконечников, Джонатан Свифт больше вдохновился спором между сторонниками теорий мандарина и лимона, чем войнами между католиками и гугенотами, как принято считать.

Посмотрите на географическую карту. Гренландия по площади кажется намного больше, чем Австралия. Но на самом деле площадь Австралии примерно втрое больше. Дело в том, что любая географическая карта имеет искажения — не удается переложить поверхность круглой планеты* на плоскую бумагу так, чтобы равные расстояния изображались равными расстояниями. Приходится чем-то жертвовать.



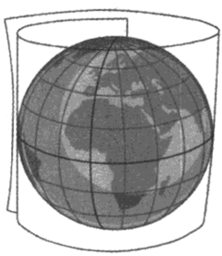
Например, на карте, которую мы здесь изобразили (проекция Меркатора), сохраняются углы, но расстояния и площади искажаются — чем дальше от экватора, тем сильнее искажения. В углу карты написано — масштаб 1:358 700 000, то есть в одном сантиметре 3587 километров. Как это понять? Это — ос-

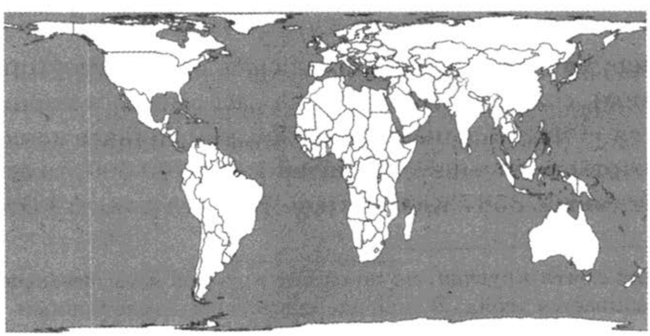
* Земля почти круглая, но не совсем круглая. Тело, имеющее форму Земли, называется геоид. В природе существует единственный геоид — сама Земля.

новной масштаб. Он будет верным на экваторе. Чем дальше от экватора — тем меньше следует полагаться на масштаб. Россия выглядит на этой карте намного больше, чем выглядела бы на глобусе с тем же масштабом. А Северный и Южный полюсы на такой карте вообще изобразить невозможно.

Считается, что на масштаб мировой карты (такой, как на рисунке) можно полагаться более-менее в узкой полосе вдоль экватора (±15°). На широте Москвы или Санкт-Петербурга масштаб будет уже не 260 км в 1 сантиметре, а вдвое крупнее — примерно 130 км в одном сантиметре.

Бывают другие проекции. Например, равновеликие проекции изображают равные площади на земном шаре равными площадями на карте. Удобно сравнивать площади. Как сделать такую проекцию? «Завернем» глобус в лист бумаги. Получается шар, вписанный в цилиндр. Теперь «перенесем» границы стран и морей с шара на цилиндр. Получается удивительное свойство — площадь страны на глобусе оказывается такой же, как площадь ее изображения на цилиндре. Осталось развернуть цилиндр — получим карту. Но вот на достоверность расстояний и углов полагаться на такой карте не следует. Например, Россия будет выглядеть очень длинной, но узкой, и чем дальше от экватора, тем сильнее искажения. Штурман морского или воздушного судна предпочел бы другую карту.





Проекция сохраняет площади. Но чем дальше от экватора, тем сильнее искажения.

Если мы хотим составить верное наглядное представление о площадях, углах и расстояниях на земной поверхности, лучше пользоваться не картами, а глобусом.

Длина окружности и площадь круга

Мы понимаем, что площадь и объем фигуры зависят от ее размеров. Увеличим радиус круга вдвое. Его площадь вырастет в 4 раза. Это свойство позволяет нам легко сравнивать площади кругов.

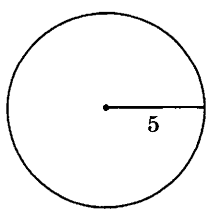
Но все же, чему равна площадь круга? Например, чему равна площадь круга радиуса 1? Больше трех, но меньше четырех. Точное значение равно $\pi = 3{,}1415926...$

Древние математики долго пытались найти дробь, равную площади единичного круга или длине единичной полуокружности. Совсем недавно (в XVIII веке) было доказано, что число π иррационально (что имеется в виду — см. главу 2). Другие пытались построить с помощью циркуля и линейки круг, площадь которого равна площади единичного квадрата. Это тоже невозможно, опять же из-за природы числа π. Оказалось, что π не только не дробь, но даже и не комбинация корней из дробей, а это обстоятельство оказалось решающим. Задача получила название «Квадратура круга».

Площадь круга равна πr^2.

Задача 140. Найдите площадь круга, изображенного на рисунке.

Решение. Радиус круга равен 5. Значит, площадь круга равна $\pi \cdot 5^2 = 25\pi$.



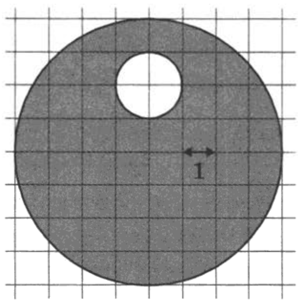
Ответ: 25π. Считая, что $\pi = 3{,}14...$, находим, что $25\pi \approx 25 \cdot 3{,}14 = 78{,}5$.

В публикации одного современного журналиста написано, что в случае взрыва Йеллоустоунской кальдеры* неминуемо наступит полное разрушение в радиусе 50 000 км. Очевидно, журналист ошибся — диаметр всей Земли в 4 раза меньше. Может быть, журналист неправильно что-то понял, а в виду имелась площадь 50 000 кв. км? Тоже немало, но все же... Исходя из этого предположения, определите радиус круговой области предполагаемого разрушения.

Задача 141. Найдите площадь фигуры, изображенной на рисунке.

Решение. Фигура состоит из круга радиусом 4, из которого удален меньший круг радиусом 1. Получаем:

$$\pi \cdot 4^2 - \pi \cdot 1^2 = 15\pi.$$



Ответ: 15π.

Число π появляется в задачах и расчетах, связанных с круглыми телами — цилиндрами, конусами, шарами и их частями. И, разумеется, число π — постоянный персонаж в формулах, имеющих прикладное значение.

В 1897 году д-р Эдвин Гудвин предложил законодательному собранию штата Индиана закон, по сути устанавливающий, что $\pi = 3{,}2$. Предполагалось, что штат Индиана может пользоваться новым математическим знанием бесплатно, а весь остальной мир должен платить авторские.

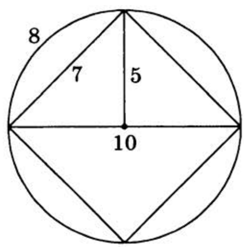
«A Bill for an act introducing a new mathematical truth and offered as a contribution to education to be used...»

В переводе наиболее интересная часть звучит так: «Билль, представляющий новое математическое знание и вносящий вклад в образование для свобод-

* Кальдера — кратер супервулкана. Кальдеры в диаметре могут достигать 20 км.

ного и бесплатного использования исключительно в штате Индиана, предлагаемый к принятию официальным Законодательным Актом в 1897 году... Вычислено отношение хорды к дуге окружности в девяносто градусов, каковое оказалось семь к восьми, и также отношение диагонали к стороне квадрата, каковое оказалось десять к семи, откуда вытекает важный факт — отношение диаметра окружности к ее длине есть четыре к пяти четвертым».

Как раз отсюда и следовало бы, что длина окружности больше диаметра в $4:\frac{5}{4}=3,2$ раза, то есть $\pi = 3,2$.



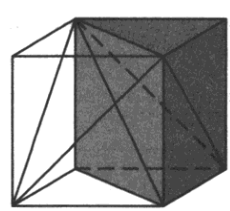
По поручению автора «закон» представил в Генеральную Ассамблею штата Индиана некто Тейлор Рекорд. Считается, что Рекорд и другие законники штата мало что смыслили в математике, и закон был бы принят, если бы не вмешался Сенат штата и лично профессор К. Уолдо, давший «экспертное заключение», как мы бы сказали сейчас.

Мы же думаем, что законодатели штата Индиана вовсе не были математически безграмотны. Известно, что мистер Рекорд был лесоторговцем. Следовательно, ему часто приходилось вычислять объем поставленной на рынок древесины. Разумеется, даже небольшое увеличение числа π при продаже леса очень выгодно.

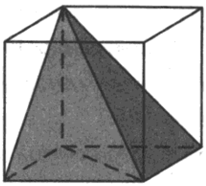
Полный текст билля на английском языке можно найти в интернете.

Площади и объемы некоторых многогранников

Если пирамида и призма имеют одинаковое основание и высоту, то объем пирамиды в три раза меньше объема призмы. Этот факт легко увидеть на рисунке, где куб разбит на 6 пирамидок одинакового объема: у них одинаковые по площади основания (половины граней куба) и одинаковые высоты — ребра куба. Для наглядности раскрашены только три пирамиды, занимающие



половину куба. Возьмите цветные карандаши и ради пользы и развлечения обведите ребра еще трех пирамид.



Если объем куба 1, то объем каждой из шести пирамид $\frac{1}{6}$. Объединяя теперь две подходящие пирамидки в одну (так, чтобы их основания вместе заполнили квадратную грань куба), видим, что объем этой новой пирамиды равен $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$, то есть ровно трети объема куба. Это соотношение сохраняется для любой пары «призма-пирамида». Нужно только, чтобы основания и высоты были одинаковы.

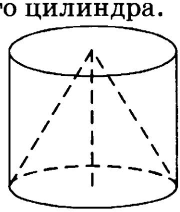
Задача 142. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, объем которого равен 48. Найдите объем пирамиды AA_1B_1BD.

Формулы площадей и объемов тел вращения

Можно заметить, что цилиндр в некотором смысле устроен так же, как призма, — имеются параллельные основания и боковая поверхность, которую можно составить из параллельных друг другу отрезков одинаковой длины. Можно даже сказать, что призма — это частный специальный вид цилиндра с многоугольным основанием. Поэтому и формулы вычисления объемов призмы и цилиндра одинаковы — площадь основания умножается на высоту.

Такая же аналогия наблюдается между конусом и пирамидой — имеется основание и выделенная вершина, которая соединена отрезками со всеми точками на границе основания. И формулы объемов похожи — и у пирамиды, и у конуса объем в три раза меньше произведения основания и высоты.

Стало быть, если конус вписан в цилиндр, его объем в три раза меньше объема этого цилиндра.

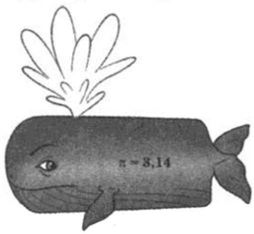


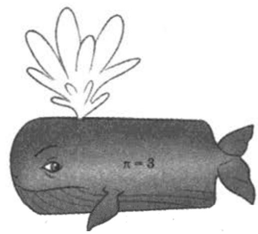
Задача 143. В цилиндр вписан конус. Найдите объем фигуры, заключенной между поверхностями цилиндра и конуса, если объем конуса равен 8.

Решение. Объем цилиндра равен $8 \cdot 3 = 24$. Значит, фигура вне конуса, но внутри цилиндра имеет объем $24 - 8 = 16$.

Ответ: 16.

То ли в справочнике китобоя 1960-х годов, то ли в научной статье 1935 года была формула для вычисления объема тела кита. В формуле, конечно, участвовало число π. Самое трудное, вероятно, состояло в объяснении смысла π. Утверждается, что авторы справочника (статьи) просто предложили считать, что для гренландских китов число π равно 3.





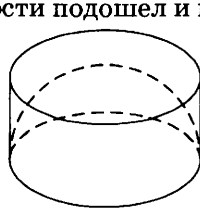
Другие источники утверждают, что справочник полагает для гренландских китов $\pi = 3{,}14$. В любом случае можно предположить, что для синих китов π не такое, как для гренландских, а для кашалотов — тоже отдельное «кашалотное» π.

История про китов хрестоматийна, но всякие основания ее правдоподобности утрачены. Авторы были бы признательны читателю, если бы у того нашлись безусловные подтверждения истинности этой истории, а лучше — оригинальный текст издания.

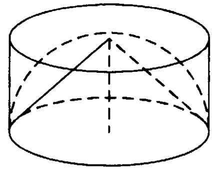
Задача Архимеда

Интересно, что произойдет, если в эту конструкцию добавить еще полушар, который вписан в цилиндр, но описан около конуса.

Представим, что в цилиндр вписан полушар. Если представить трудно, вообразите, что в кастрюлю положили половину арбуза, который в точности подошел и по ширине, и по высоте.



Теперь вообразите, что в тот же цилиндр вписан конус (в ту же кастрюлю поставили воронку подходящего размера)



Если объем конуса равен 1, то оказывается, объем полушара равен 2, а объем цилиндра равен 3. Получается, что объемы конуса, полушара и цилиндра одинакового радиуса (и такой же высоты), относятся как 1:2:3.

Иначе это утверждение звучит так: объем конуса в точности равен объему, заключенному между поверхностями конуса и полушара, и в точности равен объему, заключенному между поверхностями полушара и цилиндра.

Считается, что впервые обнаружил этот факт Архимед.

Неизвестно, какое именно доказательство дал (и дал ли) Архимед факту про отношение объемов конуса, полушара и цилиндра. Известно, что он завещал вырезать чертеж к этой задаче и полученный результат на надгробном камне своей могилы. Это было сделано, несмотря на все политические обстоятельства того времени. До наших дней этот камень, к сожалению, не сохранился.

Задача 144. В цилиндр вписан конус. Найдите объем конуса, если объем цилиндра равен 36.

Решение. Поскольку конус вписан в цилиндр, высота конуса в точности равна высоте цилиндра, и радиусы их равны. Можно воспользоваться формулами объемов:

$$\frac{V_{\text{кон}}}{V_{\text{цил}}}=\frac{\frac{1}{3}\pi R^2 H}{\pi R^2 H}=\frac{1}{3}.$$

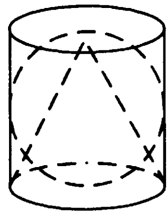
А можно вспомнить задачу Архимеда — объем вписанного в цилиндр конуса втрое меньше объема цилиндра:

$$V_{\text{кон}}=\frac{1}{3}V_{\text{цил}}=\frac{1}{3}\cdot 36=12.$$

Ответ: 12.

Что изменится, если в цилиндр вписан конус и шар целиком, а не полушар?

Задача 145. В цилиндр объемом 3 вписаны конус и шар. Найдите объем шара и объем конуса.



Решение. Радиусы цилиндра, конуса и шара одинаковы и равны R. Высоты цилиндра и конуса одинаковы и вдвое больше радиуса: $H = 2R$. Можно воспользоваться формулами из таблицы и найти по очереди отношения объемов цилиндра и шара, цилиндра и конуса (или шара и конуса).

Можно рассуждать иначе. Если конус вписан в полушар, вписанный в цилиндр, то отношение их объемов известно:

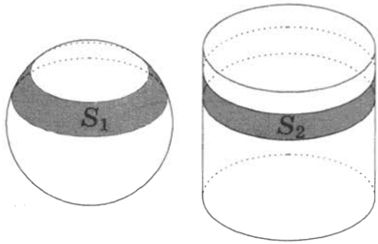
$$V_{\text{кон}} : V_{\text{полуш}} : V_{\text{цил}} = 1:2:3.$$

В нашем случае каждое из тел «удваивается» — цилиндр и конус вдвое «вытягиваются», от чего их объемы становятся больше в 2 раза. Полушар заменяется шаром того же радиуса, отчего объем его также удваивается. Значит, отношение объемов прежнее: $V_{\text{кон}} : V_{\text{шар}} : V_{\text{цил}} = 1:2:3$. Поэтому объем шара равен 2, а объем конуса 1.

Ответ: 2 и 1.

Задача о поясах и снова картографическая проекция

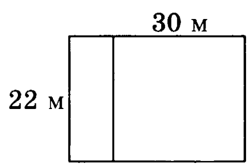
Разговаривая о географических картах и искажениях на них, мы отмечали одно свойство. Если «завернуть» глобус (шар) в лист бумаги, как на рисунке, и спроектировать горизонтально очертания материков, морей и островов с шара (глобуса) на поверхность получившегося цилиндра, то площади сохраняются (см. стр. 99–100). То есть фигура на шаре будет изображаться фигурой той же площади на цилиндре. Увы, при этом форма фигуры пострадает. Откуда это следует?



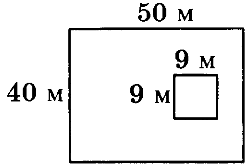
Не вдаваясь в подробности (не доказываем!), скажем лишь, что это следует из следующего факта про цилиндр и вписанный в него шар. Если провести две плоскости, перпендикулярные оси цилиндра, то они «вырежут» на цилиндре и на шаре два пояса. Один пояс — цилиндрический, а другой — шаровой. Площади этих поясов будут равны, как бы мы ни проводили параллельные плоскости.

Задачи к главе 5

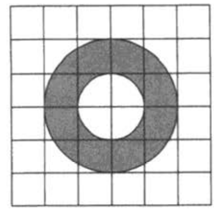
Задача 146. Дачный участок имеет форму прямоугольника со сторонами 22 метра и 30 метров. Хозяин планирует обнести его забором и разделить таким образом на две части, одна из которых имеет форму квадрата. Найдите общую длину забора в метрах.



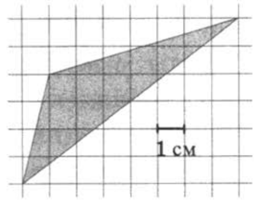
Задача 147. Дачный участок имеет форму прямоугольника, стороны которого равны 50 м и 40 м. Дом, расположенный на участке, имеет форму квадрата со стороной 9 м. Найдите площадь оставшейся части участка. Ответ дайте в квадратных метрах.



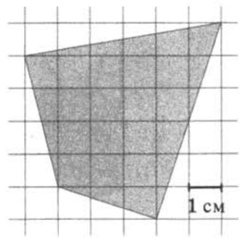
Задача 148. На клетчатой бумаге нарисованы два круга. Площадь внутреннего круга равна 27. Найдите площадь заштрихованной фигуры.



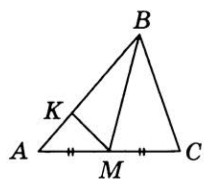
Задача 149. Найдите площадь треугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



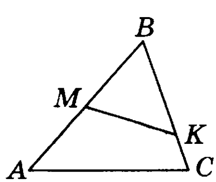
Задача 150. Найдите площадь четырехугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



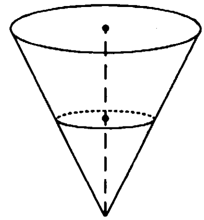
Задача 151. В треугольнике ABC проведена медиана BM, на стороне AB взята точка K так, что $AK=\frac{1}{7}AB$. Площадь треугольника AMK равна 2. Найдите площадь треугольника ABC.



Задача 152. В треугольнике ABC на сторонах AB и BC отмечены точки M и K соответстве́нно так, что $BM:AB = 1:2$, а $BK:BC = 2:3$. Во сколько раз площадь треугольника ABC больше площади треугольника MBK?

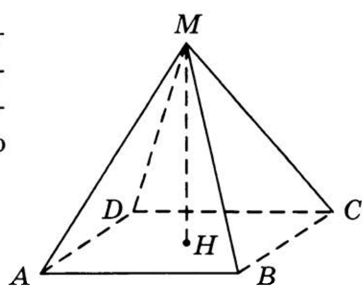


Задача 153. В сосуде, имеющем форму конуса, уровень жидкости достигает $\frac{1}{2}$ высоты. Объем жидкости равен 60 мл. Сколько миллилитров жидкости нужно долить, чтобы полностью наполнить сосуд?

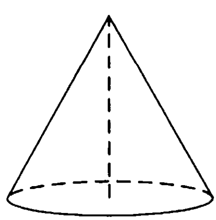


Задача 154. В бак, имеющий форму цилиндра, налили 10 л воды, а затем погрузили в воду деталь. Уровень воды в баке поднялся в 1,6 раза. Найдите объем детали. Ответ дайте в кубических сантиметрах, зная, что в одном литре 1000 кубических сантиметров.

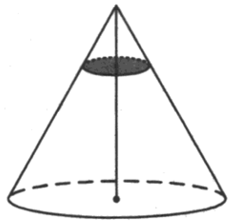
Задача 155. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды, сторона основания которой равна 6, а боковое ребро $3\sqrt{3}$.



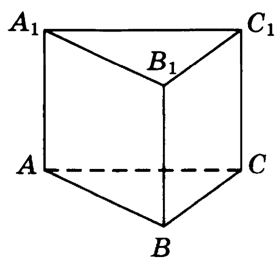
Задача 156. Объем конуса равен 96π, а его высота равна 8. Найдите радиус основания конуса.



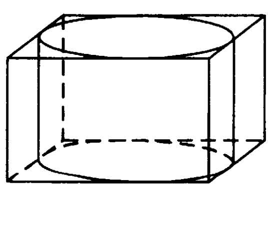
Задача 157. Объем конуса равен 256. Через точку, делящую высоту конуса в отношении 1:3, считая от вершины, проведена плоскость, параллельная основанию. Найдите объем конуса, отсекаемого от данного конуса проведенной плоскостью.



Задача 158. Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 1, а высота этой призмы равна $2\sqrt{3}$. Найдите объем призмы $ABCA_1B_1C_1$.



Задача 159. Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания и высота которого равны 2. Найдите объем параллелепипеда.



ГЛАВА 6. ТРИГОНОМЕТРИЯ

Тангенс

Безусловно, тангенс вам знаком. Если не по сути, то хотя бы по имени, а лучше сказать — по своим многочисленным именам. Так исторически сложилось, что в школе сначала изучают тангенс, затем опять изучают тангенс, потом снова изучают тангенс, но каждый раз называют его иначе и не пытаются опознать старого знакомого.

Мы не будем рассуждать, как так произошло. Проще показать тангенс в окружающей обстановке. Знак «Крутой подъем», предусмотренный правилами дорожного движения, информирует водителя о крутизне подъема, выраженной в процентах. Число показывает, на сколько метров поднимается дорога в среднем на каждые 100 метров пути. В данном случае на 100 метров пути подъем составляет 9 метров. Это и есть тангенс угла подъема дороги:

$$\mathrm{tg}\alpha = 0{,}09.$$

Кстати, пока речь идет о малых углах (таких, как уклон дороги), разница между синусом и тангенсом незначительна. Поэтому в разных наставлениях этот знак может трактоваться как тангенс или как синус, в зависимости от того, как именно отсчитываются 100 метров пути — вдоль горизонтали или вдоль полотна дороги.

Соответствующий угол подъема дороги чуть больше 5 градусов:

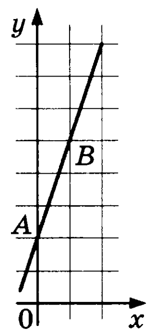
$$\mathrm{tg}\,5{,}14^\circ \approx 0{,}09.$$

Задача 160. Знак «Крутой спуск» информирует водителя о том, что крутизна спуска впереди составляет 12%. Пользуясь таблицей, найдите уклон дороги в градусах.

α	tgα	α	tgα	α	tgα
1°	0,02	6°	0,11	11°	0,19
2°	0,03	7°	0,12	12°	0,21
3°	0,05	8°	0,14	13°	0,23
4°	0,07	9°	0,16	14°	0,25
5°	0,09	10°	0,18	15°	0,27

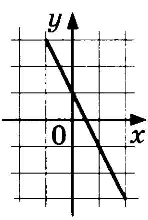
Задача 161. В инструкции о допуске транспортных средств к эксплуатации сказано, что стояночный тормоз (ручной тормоз) должен удерживать автомобиль полной массой на уклоне не менее 23%. Выразите угол этого уклона в градусах.

Тангенс — угловой коэффициент прямой



На рисунке изображена прямая $y = 3x + 2$. Может быть, вы помните, что число 3 в уравнении этой прямой называют угловым коэффициентом прямой. Это и есть тангенс угла наклона прямой.

Тангенс показывает, сколько «шагов вверх» приходится на «один шаг вправо» — сдвинувшись из точки A на единицу вправо, линия поднялась на 3 единицы вверх и оказалась в точке B. Это означает, что тангенс наклона линии равен 3.



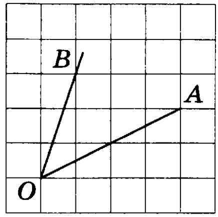
Задача 162. На рисунке показан график линейной функции. Найдите тангенс угла наклона этого графика к оси абсцисс.

Решение. На «один шаг вправо» приходится «два шага вниз». Значит, тангенс угла наклона равен -2.

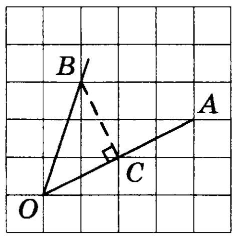
Ответ: -2.

Вы видите, что график функции на самом деле не нужен — нужно лишь достроить мысленно (или не мысленно) подходящий прямоугольный треугольник и посмотреть, насколько «круто его гипотенуза расположена по отношению к катету». Чем круче, тем тангенс больше (по модулю).

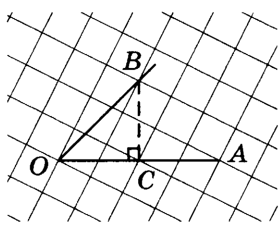
Задача 163. Найдите тангенс угла AOB.



Решение. Эта задачка немного хитрее. Ее можно решать, применяя формулу тангенса разности или суммы. Поступим иначе — достроим подходящий треугольник, проведя еще один отрезок (это можно сделать разными способами).



Видно, что отрезки BC и OC перпендикулярны. Получился прямоугольный треугольник. Нужен тангенс угла AOB. Повернем рисунок так, чтобы треугольник занял «привычное» нам положение.

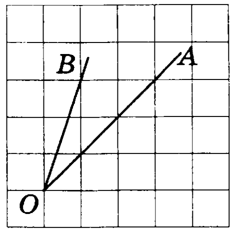


Теперь видно, что гипотенуза BO «на шаг вправо OC делает такой же шаг вверх CB». Получается:

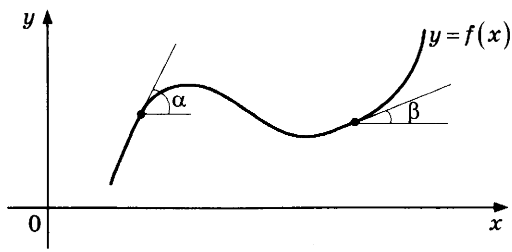
$$\operatorname{tg}\angle AOB = \operatorname{tg}\angle BOC = \frac{BC}{OC} = 1.$$

Ответ: 1.

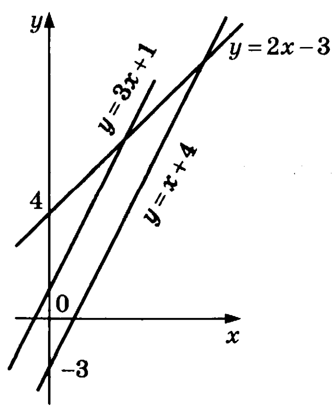
Задача 164. Найдите тангенс угла AOB по этому рисунку. Здесь опять же нужно достроить подходящий треугольник.



На самом деле тангенс был бы не очень нужен, если бы все ограничивалось измерением углов между прямыми. Часто приходится измерять более сложно устроенные углы. Например, угол между осью абсцисс и графиком функции. Понятно, что в разных точках у графика функции наклон разный, если график — кривая линия.



Для измерения наклона графика как раз удобно использовать тангенсы, а не сами углы. Почему? Потому что при сложении функций тангенсы углов наклона тоже складываются. Это хорошо видно, когда функции линейны, а их графики — прямые линии. Посмотрите на рисунок.



Была функция $y = 2x - 3$. Тангенс угла наклона равен 2. Прибавили функцию $y = x + 4$ (тангенс угла наклона 1). Получилась функция $y = 3x + 1$. Тангенс угла наклона (угловой коэффициент) теперь равен $2 + 1 = 3$.

Задача 165. Найдите тангенс угла наклона прямой $y = -4x + 1$ к оси абсцисс.

Задача 166. Найдите тангенс угла наклона графика функции, которая получена сложением функций $y = 2x - 1$ и $y = 3x + 4$.

Задача 167. Найдите тангенс наклона графика функции, которая получена сложением функций $y = -x + 5$ и $y = 6 - 7x$.

Задача 168. Докажите, что функция $y = 5x - |4x + 3|$ возрастает на всей числовой прямой.

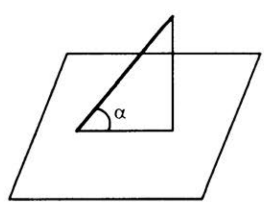
Решение. График состоит из фрагментов двух прямых: $y = 5x - 4x - 3$ и $y = 5x + 4x + 3$, то есть $y = x - 3$ и $y = 9x + 3$. Угловые коэффициенты обеих прямых положительны. Следовательно, углы наклона каждой части графика к оси абсцисс положительны. Поэтому функция возрастает.

Ответ: y возрастает на всей числовой прямой.

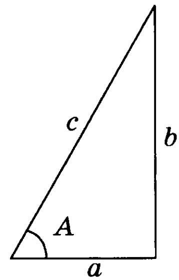
Косинус и синус

Тангенсы действительно встречаются в жизни — даже на дорожных знаках. Синусы и косинусы встречаются реже. Тем не менее и они бывают полезны и наглядны.

Геометрический смысл косинуса легко увидеть в солнечный день, держа в руках обычную палочку. Если палочка расположена не горизонтально, то ее тень на горизонтальной поверхности (например, на асфальте) короче самой палочки. Предположим, что солнце светит точно сверху и что угол наклона палочки к горизонтали равен α. Тогда $\cos\alpha$ — множитель, который показывает, во сколько раз проекция короче палочки.



Например, если палочка имеет длину 60 см, а $\alpha = 42°$, то длина тени-проекции будет $60 \cdot \cos 42° \approx 44{,}59$ (см).



Так же устроен синус — он тоже определяет «длину тени», но только не на горизонтальной поверхности, а на вертикальной, при условии, что источник света сбоку.

Эти наглядные представления обычно формализуют с помощью прямоугольного треугольника. Если катеты равны a и b, а гипотенуза c, то

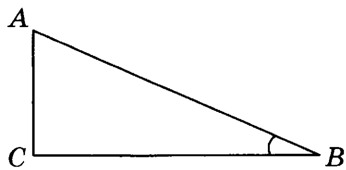
$$\frac{a}{c} = \cos A, \quad \frac{b}{c} = \sin A$$

или, что то же самое,

$$a = c \cdot \cos A, \quad b = c \cdot \sin A.$$

Теорема Пифагора утверждает, что $a^2 + b^2 = c^2$. Из этого равенства вы легко получите *основное тригонометрическое тождество* $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.

Задача 169. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом при вершине C известно, что $AB = 15$, а $\sin\angle B = 0{,}4$. Найдите сторону BC.



Решение. 1-й способ. Пользуясь синусом угла $\angle B$, можно найти противолежащий этому углу катет AC:

$AC = AB \cdot \sin B = 15 \cdot 0{,}4 = 6.$ Тогда по теореме Пифагора $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{225 - 36} = \sqrt{189}.$

2-й способ. Сначала найдем косинус из основного тригонометрического тождества. Поскольку косинус острого угла положителен, $\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \sqrt{1 - 0{,}16} = \sqrt{0{,}84}.$

Тогда $BC = AB \cdot \cos B = 15 \cdot \sqrt{0{,}84} = \sqrt{225 \cdot 0{,}84} = \sqrt{189}.$

Чтобы решить задачу, достаточно применить один способ. Но если вы не уверены в своих вычислениях, лучше сделать и то, и другое. Можно быть почти уверенным в отсутствии ошибки, если результаты совпали.

Ответ: $\sqrt{189}$.

Задача 170. Найдите $\cos\beta$, если $\sin\beta = 0{,}6$ и известно, что $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$.

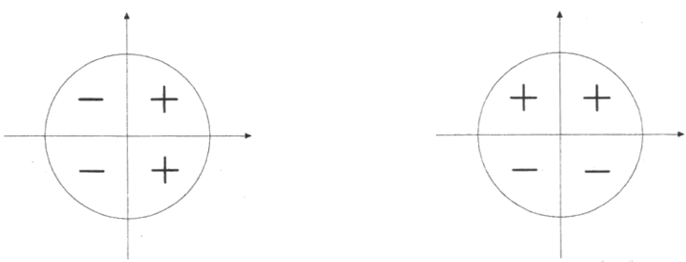
Решение. Найти $\cos^2\beta$ несложно:

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - 0{,}6^2 = 0{,}64.$$

Получилось квадратное уравнение, из которого $\cos\alpha = -0{,}8$ или $\cos\alpha = 0{,}8$.

Нужно выбрать знак.

Дело в том, что косинус может оказаться отрицательным. Для того чтобы разобраться, воспользуемся диаграммой знаков для косинуса. На этой диаграмме показаны знаки косинуса в разных четвертях. Справа от нуля косинус положителен, слева — отрицателен.



Знаки косинуса *Знаки синуса*

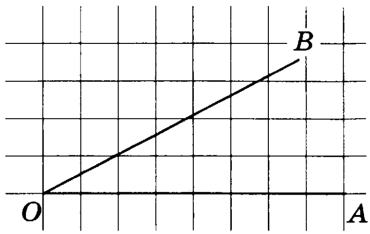
В нашем случае угол α лежит во второй четверти. Косинус в этой четверти отрицателен. Значит, верный ответ $-0{,}8$.

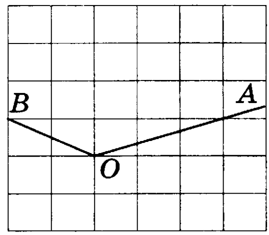
Ответ: $-0{,}8$.

Для синуса диаграмма знаков выглядит иначе, поскольку значение синуса отсчитывается не по оси абсцисс, а по оси ординат.

Задачи к главе 6

Задача 171. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображен угол. Найдите тангенс этого угла.

а) 

б) 

Задача 172. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $\sin A = 0{,}8$, $AC = 6$. Найдите AB.

Задача 173. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $AC = 16$, $\operatorname{tg} A = 0{,}5$. Найдите BC.

Задача 174. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, CH — высота, $AB = 17$, $\operatorname{tg} A = \frac{1}{4}$. Найдите AH.

Задача 175. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, CH — высота, $AC = 6$, $\sin A = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Найдите BH.

Задача 176. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, CH — высота, $AC = 5$, $AH = 2\sqrt{6}$. Найдите $\cos B$.

Задача 177. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, высота CH равна 4, $BC = \sqrt{41}$. Найдите $\operatorname{tg} A$.

Задача 178. В тупоугольном треугольнике ABC $AC = BC$, высота AH равна 14, $CH = 2\sqrt{51}$. Найдите $\sin ACB$.

Задача 179. Меньшее основание равнобедренной трапеции равно 5. Высота трапеции равна 15. Тангенс острого угла равен $\frac{5}{4}$. Найдите большее основание.

Задача 180. Найдите корень уравнения $\cos\frac{\pi(8x+1)}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

В ответе запишите наибольший отрицательный корень.

Задача 181. Найдите корень уравнения $\operatorname{tg}\frac{\pi(4x-5)}{4}=-1$. В ответе напишите наибольший отрицательный корень.

Задача 182. Найдите корень уравнения $\sin\frac{\pi(x+9)}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

В ответе напишите наименьший положительный корень.

Задача 183. Найдите значение выражения $\frac{31\cos 67^\circ}{\sin 23^\circ}$.

Задача 184. Найдите значение выражения $35\sqrt{6}\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{4}$.

Задача 185. Найдите значение выражения

$$\frac{29}{\sin\left(-\frac{35\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{26\pi}{3}\right)}.$$

ГЛАВА 7. ЛОГИКА

Утверждения «общие» и формальные

Как показывает опыт, мы не всегда формально точно излагаем словами то, что подразумеваем. При этом обычно собеседник нас понимает правильно, поскольку мыслит также неформально. Умение понимать неполные, неточные формулировки «как надо, а не как сказано», заложено в нашей культуре, в частности, в культуре языка.

— Молодой человек, не подскажете, на этом трамвае я до рынка доеду?

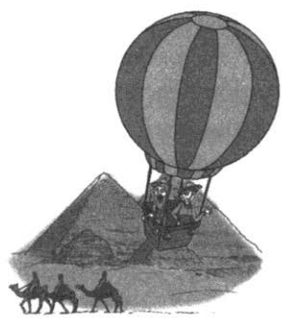
— Знаете, уважаемая, я предсказаниями не занимаюсь...

Даже небрежные утверждения понятны и не вызывают у собеседников проблем до тех пор, пока речь идет о привычных вещах.

Известный анекдот. Затерянные в небе Сахары воздухоплаватели видят в пустыне бедуина.

— Сэр, скажите, пожалуйста, где мы находимся, хотя бы приблизительно!

— Отчего же приблизительно? Вы, господа, совершенно определенно в корзине воздушного шара.



В этот момент порыв ветра уносит шар в сторону.

— Нам не повезло. Это был математик, — печально говорит один из аэронавтов другому.

— Джон, почему ты решил, что этот бедуин — математик?

— Да потому, Эдди, что его ответ абсолютно точен и совершенно бесполезен.

Пример. «Мужчины носят пиджаки, а женщины — платья». Простая формула, которая нам понятна: мужчины часто ходят в пиджаках, хотя совсем не обязательно, а женщины часто носят платья, хотя бывает, что и пиджаки тоже. Кроме того, все это неверно на пляже или в бане.

— Вы не скажете, который час?
— Отчего ж нет? Охотно скажу — спрашивайте.

Теперь представим себе похожую формулу. «Квадраты имеют по четыре стороны, а треугольники — по три». Следует ли это понимать в том же смысле? — мол, у квадрата обычно четыре стороны, но в особых случаях может быть одна или две, а треугольники часто встречаются с тремя сторонами, но бывают и с пятью, и с четырьмя, при этом третью на пляже не надевают.

— Молодой человек, а все же, до рынка в какую сторону?
— Сейчас... сейчас... (ковыряясь в навигаторе). Вот, бабуля, двигайтесь курсом 232 градуса 45 минут.

Обратный пример: известно, что у квадратов диагонали перпендикулярны. Это означает, что не существует квадрата, который имел бы неперпендикулярные диагонали.

Попробуем составить похожее бытовое утверждение: «все голландцы живут в Голландии». Означает ли это, что не существует голландца, который живет не в Голландии? Таких голландцев много. Значит, утверждение, что голландцы живут в Голландии, неверно?

Кажется, все понятно. Утверждение, верное «в общем и целом», может быть неверным формально. Математические утверждения должны быть формальными. Их нужно понимать буквально и составлять их нужно так, чтобы можно было буквально и однозначно понять. Существует множество подходов к построению логики. Мы рассмотрим лишь несколько приемов, позволяющих высказываться и понимать утверждения формально.

Кстати, развитием математических логик среди прочих занимался Чарльз Лютвидж Доджсон. Одна из книг по логике «Логическая игра» вышла у него такой, что он решил ее издать под именем Льюиса Кэрролла.

В примере с диагоналями квадрата и голландцами достаточно расставить уточнения, о каком множестве объектов идет речь: обо всех, хотя бы об одном или ни об одном.

Например, у всякого квадрата диагонали взаимно перпендикулярны.

Ясно, что утверждение «всякий голландец живет в Голландии» ошибочно. Можно сделать так: «существуют голландцы, живущие в Голландии». Это верно, но бессодержательно — на то она и Голландия. Еще одно: «существуют голландцы, не живущие в Голландии». Заметьте, два последних утверждения не отрицают друг друга — они выполняются одновременно.

Отрицание

Важно уметь строить отрицания к утверждениям. Если утверждается, что *все* объекты какого-то множества *обладают* каким-то свойством, то отрицание подразумевает, что *хотя бы один* объект этим свойством *не обладает*.

Наоборот — если исходное утверждение говорит, что *хотя бы один объект* обладает неким свойством, то отрицание будет говорить, что все объекты этим свойством *не обладают*. Это можно записать формально, используя буквенные обозначения.

Для утверждения

Все X из множества M обладают свойством S

отрицание будет выглядеть так:

Хотя бы один X из множества M не обладает свойством S

Для утверждения

Хотя бы один X из множества M обладает свойством S

отрицание строится по такому же правилу:

Все X из множества M не обладают свойством S.

Если *A* отрицание для *B*, то *B* отрицание для *A*. При этом верным будет одно и только одно из этих утверждений.

A. Все птицы летают;

B. Существует птица, которая не летает.

Эти утверждения — отрицания друг для друга. В данном случае верно только второе.

Задача 186. Даны утверждения.

а) Все кошки ступают мягко.

б) Среди англичан найдется хотя бы один брюнет.

в) Существует квадрат, у которого диагонали не перпендикулярны друг другу.

г) Все собаки имеют хвосты.

Постройте отрицания к этим утверждениям.

Обратите внимание на то, что формальные утверждения про кошек и англичан получаются странными. Мы так не говорим. Зато утверждение про квадрат не звучит нелепо. Математические объекты и их свойства, как правило, точно определены, и поэтому формальные утверждения о математических объектах не выглядят искусственно.

Задачи

Задача 187. Даны утверждения.

а) Все мыши имеют хвост.

б) Найдется река, в которой не водится рыба.

в) Сущестует кошка, не покрытая шерстью.

г) Все треугольники — остроугольные.

Постройте отрицания к этим утверждениям.

Задача 188. Выберите отрицания к утверждению «все рыбы плавают»:

1) Все, кто не плавает, — не рыбы.
2) Все, кто плавает, — рыбы.
3) Все рыбы не плавают.
4) Не всякая рыба плавает.
5) Не всякое плавающее животное — рыба.
6) Найдется неплавающая рыба.
7) Хотя бы одна рыба не плавает.

Задача 189. Выберите отрицания к утверждению «все слоны живут в Африке»:

1) Хотя бы один слон не живет в Африке.
2) Не все животные в Африке — слоны.
3) Все слоны живут не в Африке.
4) Все, кто не живет в Африке, — не слоны.

5) Все животные в Африке — слоны.
6) Не все слоны живут в Африке.
7) Найдется слон, не живущий в Африке.

Противоположные утверждения

Противоположное утверждение — не то же самое, что отрицание. Два противоположных утверждения утверждают одно и то же, но «с разных сторон». Поэтому они одновременно верны или неверны. Для утверждения «всякая птица летает» противоположным утверждением будет «если что-то не летает, то это — не птица».

Формальная запись поможет понять общий принцип. Для утверждения

А. *Все X из множества M обладают свойством S.*
противоположным будет утверждение

В. *Если X не обладает свойством S, то X не принадлежит множеству M.*

Еще один пример противоположных утверждений:

А. Все квадраты являются параллелограммами;

В. Если фигура не параллелограмм, то она не является квадратом.

Построение отрицаний и противоположных утверждений широко используется при доказательствах.

Проверка истинности. Доказательства и контрпримеры

Истинность или ложность общих утверждений про деревья, людей, рыб и т.п. обычно принимается как некоторое соглашение. «Все деревья имеют листья». В целом верно, но как-то не очень. Если не считать хвою разновидностью листьев, это уже неверно. Кроме того, зимой многие деревья теряют листья. А как быть с сухими деревьями?

Математика старается избегать таких неоднозначностей и неуточненностей, а если все же приходится с ними иметь дело, математики придумывают для этого специальные средства.

Есть утверждения, которые изначально считаются истинными. Их называют аксиомами, и с ними все в порядке — их не приходится проверять. Другие утверждения приходится опровергать или доказывать. Доказательство представляет собой цепочку утверждений, иногда довольно сложную.

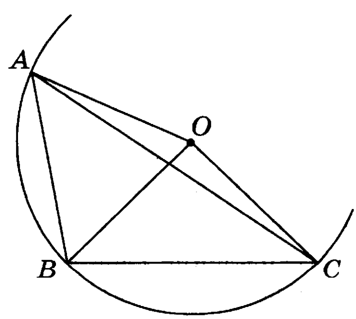
Иногда очень легко доказать, что некое утверждение ложно. Обычно это ложные утверждения вида «Всякий X обладает свойством S». Для этого достаточно привести пример, показывающий, что утверждение может не выполняться. Такой опровергающий пример называют *контрпримером*.

Приведем два примера.

1. Утверждение: «Любое арифметическое выражение имеет значение». *Контрпример:* выражение $\frac{1}{0}$ значения не имеет. Значит, утверждение ложно.

2. Утверждение: «Внутри всякого треугольника найдется точка, одинаково удаленная от всех вершин этого треугольника».

Разумеется, каков бы ни был треугольник, точка, равноудаленная от его вершин, существует — центр описанной окружности. Но если треугольник тупоугольный, то эта точка будет не внутри треугольника, а снаружи. А если прямоугольный, то эта точка лежит на гипотенузе. Таким образом, мы нашли контрпример — тупоугольный треугольник, внутри которого такой точки нет. Утверждение опровергнуто.



Контрпример не всегда легко найти. Существует много математических утверждений (гипотез), которые не доказаны и для которых не найдены контрпримеры.

Знаменитая гипотеза Гольдбаха утверждает, что любое натуральное четное число начиная с 4 можно записать в виде суммы двух простых чисел. Например, $4 = 2 + 2$, $6 = 3 + 3$, $8 = 3 + 5$ и т.д. Несмотря на столетия, прошедшие с момента выдвижения гипотезы, она полностью не доказана, то есть не стала теоремой. Но и контрпример — четное число, которое нельзя разбить на два простых — тоже не найден.

Задача 190. Найдите контрпримеры к следующим утверждениям.

а) все птицы умеют летать;

б) сумма двух чисел всегда больше каждого из слагаемых;

в) все обезьяны живут в Африке.

г) в каждый параллелограмм можно вписать окружность.

Возможный ответ: а) пингвин — птица нелетающая; б) если одно из слагаемых — ноль, то сумма равна первому слагаемому; в) есть обезьяны, которые живут в Индии; г) в параллелограмм с неравными сторонами вписать окружность нельзя.

Чаще всего утверждения формулируются «не вообще», а при некоторых условиях, которые считаются достоверными.

Задача 191. Ваня старше всех прочих мальчиков в классе. Маша младше всех прочих девочек в этом же классе. Какие из следующих утверждений верны?

1. Ваня старше Володи.
2. Ваня старше Маши.
3. Маша младше Лены.
4. Лена младше Вани.
5. Володя старше Маши.

Замечание. В таких задачах многое подразумевается, хотя не сказано явно. Например, здесь подразумевается, что:

1. Утверждения из условия задачи истинны.

2. Под фразой «утверждение верное» имеется в виду, что это утверждение истинно независимо от того, как распределены по возрастам все остальные учащиеся в классе.

3. Подразумевается (явно не сказано, чтобы не загромождать условие), что Володя — мальчик, Лена — девочка и что все они учатся в одном классе с Ваней и Машей.

Решение. Ваня старше всех прочих мальчиков (а значит, и Володи). Маша младше всех прочих девочек (а значит, и Лены). Значит, утверждения 1 и 3 истинны. Три других утверждения вызывают сомнения. Предположим (ведь может же такое случиться), что Маша старше Вани. Получается такая цепочка

Все мальчики, кроме Вани < *Ваня* < *Маша* < *все остальные девочки*
(знаком < мы обозначили «младше»).

Это не противоречит условиям задачи, но Ваня младше Маши и, значит, Лены, а Володя младше Маши. Мы построили контрпример к утверждениям 2, 4 и 5. Эти утверждения нельзя считать верными.

Ответ: 1 и 3.

Задачи к главе 7

Задача 192. Постройте отрицания к следующим утверждениям:
1) Вокруг любого треугольника можно описать окружность.
2) Существует море, в котором нет островов.
3) Все кошки любят ловить мышей.
4) Любая собака виляет хвостом хотя бы раз в день.
5) Существует ромб, в котором диагонали равны.

Задача 193. Выберите а) отрицания; б) противоположные утверждения к утверждению «Любой автомобиль расходует топливо»:
1) Все механизмы, не расходующие топливо, — не автомобили.
2) Все автомобили расходуют топливо.
3) Все автомобили не расходуют топливо.
4) Не все автомобили расходуют топливо.
5) Не все механизмы, расходующие топливо, — автомобили.
6) Хотя бы один автомобиль не расходует топливо.

Задача 194. В жилых домах, в которых больше 5 этажей, установлен лифт. Выберите утверждения, которые верны при приведенном условии.

1) Если в доме нет лифта, то в этом доме больше 6 этажей.
2) Если в доме лифта нет, то в этом доме меньше 6 этажей.
3) Если в доме больше 8 этажей, то в нем нет лифта.
4) Если в доме больше 7 этажей, то в нем есть лифт.

Задача 195. Повар испек 50 рогаликов, из них 15 штук он посыпал корицей, а 20 рогаликов посыпал сахаром. Выберите утверждения, которые верны при указанных условиях.

1) Найдется 10 рогаликов, которые ничем не посыпаны.
2) Если рогалик посыпан сахаром, то он посыпан и корицей.
3) Не может оказаться больше 20 рогаликов, посыпанных и сахаром, и корицей.
4) Найдется 20 рогаликов, посыпанных и сахаром, и корицей.

Задача 196. Виктор старше Дениса, но младше Егора. Андрей не старше Виктора. Выберите утверждения, которые верны при указанных условиях.

1) Егор самый старший из указанных четырех человек.
2) Андрей и Егор одного возраста.
3) Виктор и Денис одного возраста.
4) Денис младше Егора.

Задача 197. Среди дачников в поселке есть те, кто выращивает виноград, и есть те, кто выращивает груши. А также есть те, кто не выращивает ни виноград, ни груши. Некоторые дачники в этом поселке, выращивающие виноград, также выращивают и груши. Выберите утверждения, которые верны при указанных условиях.

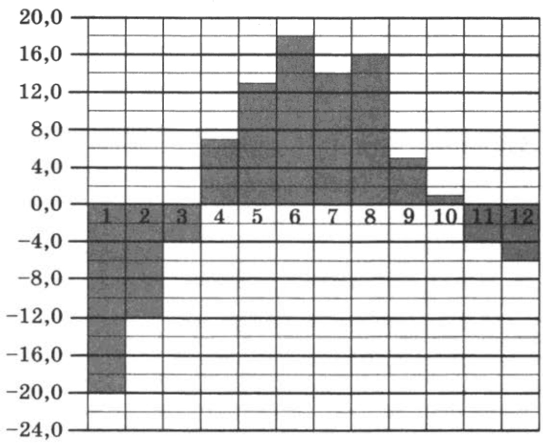
1) Если дачник из этого поселка не выращивает виноград, то он выращивает груши.
2) Среди тех, кто выращивает виноград, есть дачники из этого поселка.
3) Есть хотя бы один дачник в этом поселке, который выращивает и груши, и виноград.
4) Если дачник в этом поселке выращивает виноград, то он не выращивает груши.

ГЛАВА 8. СТАТИСТИКА И ВЕРОЯТНОСТЬ

Диаграммы

Одна из первых задач ЕГЭ — задача на чтение диаграммы. Как правило, эта задача не вызывает больших затруднений. Суть — верно понять условие задачи и прочесть данные либо по оси ординат, либо по оси абсцисс.

Задача 198. На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Екатеринбурге (Свердловске) за каждый месяц 1973 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия.

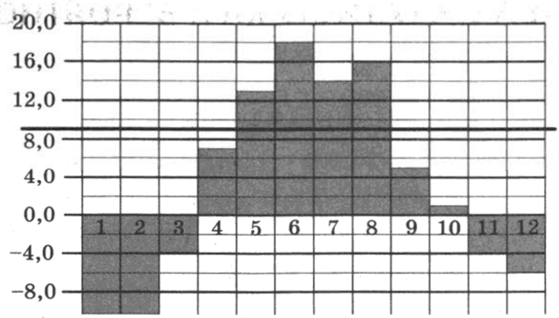


а) **Найдите среднюю температуру в июне. Ответ дайте в градусах Цельсия.**

б) Сколько было месяцев в 1973 году, когда средняя температура превышала 9 °С?

Указание. Единственное знание, которое действительно требуется, — знание порядка месяцев в году. Иными словами, нужно знать, что июнь шестой месяц года. Видно, что в этом месяце средняя температура точно посередине между 16 °С и 20 °С, то есть 18 °С.

Отвечая на вопрос б), нужно просто подсчитать, сколько столбиков на диаграмме выше 9 °С.



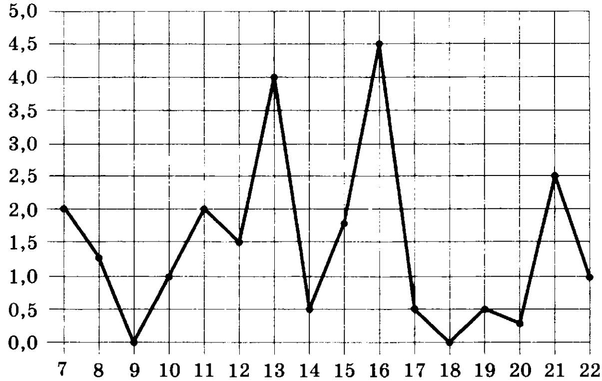
Для простоты и чтоб уж точно не ошибиться, полезно взять карандаш и с помощью линейки провести уровень, соответствующий 9 °C. Выше этой прямой оказались четыре столбика — начиная с пятого (май) и кончая восьмым (август).

Вероятно, наибольшее число ошибок в ответах ЕГЭ в такой задаче связано с неверно записанными ответами. В задании (а) спрашивается ответ в градусах Цельсия. Это значит, что единицы измерения указывать не нужно. Спрашивается только число 18. Если в ответ записать что-то вроде 18С или 18°, то такие ответы, скорее всего, будут сочтены неверными, поскольку могут быть распознаны как 186 или 180.

Парадоксально, но задание (б), где ошибиться почти невозможно, вызывает больше трудностей, чем (а). Причина та же — неверно записанный ответ. Спрашивают количество месяцев, а не их названия. Если старательно написать в ответ «МАЙ, ИЮНЬ, ИЮЛЬ, АВГУСТ», такой ответ будет засчитан ошибочным. Можно сколько угодно возмущаться, но это справедливо — ответ на поставленный вопрос не получен.

Иногда вместо столбиковой диаграммы изображают линейную диаграмму. Линейная диаграмма состоит из точек. В точках — вся информация. Отрезки, соединяющие эти точки, нужны только для удобства — чтобы точки было легче видеть на рисунке.

Задача 199. На рисунке жирными точками показано суточное количество осадков, выпадавших в Мурманске с 7 по 22 ноября 1995 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — количество осадков, выпавших в соответствующий день, в миллиметрах.

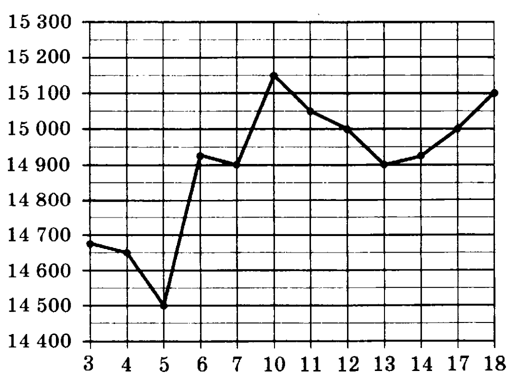


а) Сколько миллиметров осадков выпало 12 ноября?

б) Сколько дней из данного периода выпадало менее 3 миллиметров осадков?

Следующая задача — тоже с линейной диаграммой — ничуть не сложнее двух предыдущих, но она нередко вызывает трудности у того, кто не очень внимательно прочел условие.

Задача 200. На рисунке жирными точками показана цена олова на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 3 по 18 сентября 2007 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена тонны олова в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, какого числа цена олова впервые превысила 15 000 долларов за тонну.



Отступая от традиции, мы предложим здесь четыре варианта ответов. Выберите верный.

1) 8; 2) 15 150 3) 12 4) 10

Если ваш ответ (1), обратите внимание — 8 сентября был нерабочий день. Торгов не было.

Если ваш ответ (2), внимательно прочтите вопрос к задаче и подумайте, на этот ли вопрос вы дали ответ.

Если ваш ответ (3), внимательно прочтите вопрос и подумайте, на этот ли вопрос вы дали ответ.

Если ваш ответ (4), то, вероятно, вы верно прочли и поняли условие задачи.

Удивительно, но задачи, в которых вопрос о цене (про ось ординат), на ЕГЭ решают намного лучше, чем задачи, где вопрос о дне (про ось абсцисс). Вероятно, найти значение по рисунку чем-то проще, чем определить, какого числа это значение было или случилось впервые. Может быть, потому, что первым делом человек думает о смысле диаграммы, а значит — о значениях на оси ординат? Неизвестно. Решая такие задачи, помните — они очень просты и проверяют не глубокие знания, а умение ничего не перепутать и прочесть ответ в нужном месте.

Среднее арифметическое

Изобретение вероятностей позволило вырваться из жестких рамок двоичной логики, когда любое утверждение либо истинно, либо ложно. Вероятность позволяет судить о степени достоверности событий.

Прежде чем говорить о самой вероятности, полезно обсудить кое-что из статистики — например, средние значения.

Если имеется конечный набор числовых данных, то в нем обязательно найдутся наибольшее и наименьшее числа. Их обычно обозначают max и min.

Например, для набора $X = \{5, 4, 2, 5, 7, 1, 2, 3, 1, 4\}$; $\min X = 1$, $\max X = 7$.

Заметьте, что единица в наборе встречается два раза. Но все равно единица — наименьшее число в наборе, ведь меньше нет.

Любое число на отрезке от $\min X$ до $\max X$, включая сами эти числа, является каким-то из средних значений набора.

Таким образом, для нашего набора X средним можно считать любое число от 1 до 7. Например, 2,35 или само число 7.

Но все же обычно говорят не о каких-то средних вообще, а о средних, обладающих определенными свойствами. Выбор среднего зависит от цели изучения, природы данных и часто — от сложившейся традиции.

В России в школе итоговые отметки принято вычислять как среднее арифметическое текущих отметок. Процедура эта, надо сказать, довольно бессмысленная, поскольку школьные отметки не являются числами в прямом смысле слова — их нельзя складывать. То есть формально можно, но получается чепуха. Ведь если к отметке 2 прибавить отметку 5, не получится отметка 7. Чем же оправдан выбор среднего арифметического? Только удобством вычислений и сложившейся традицией.

Если специально не сказано другое, то под средним обычно имеют в виду среднее арифметическое: сумма всех чисел, деленная на их количество. Для нашего набора X среднее равно

$$\overline{X} = \frac{5+4+2+5+7+1+2+3+1+4}{10} = 3{,}4.$$

С помощью среднего арифметического усредняют множество величин: расходы, количество происшествий, площади и т.п.

Комментаторы футбольных и хоккейных матчей очень любят сообщать телезрителям средний возраст игроков команды. Не сказано, как вычисляется этот средний возраст, но, видимо, средним арифметическим. Вот еще один пример того, как среднее арифметическое применяется только в силу определенной традиции, но никак не связано с природой данных. Ведь нельзя же всерьез складывать возраст игроков. Иначе придется вообразить, что команда может превратиться в одного-единственного очень пожилого игрока.

Хотя среднее арифметическое умеют вычислять все, не все хорошо понимают особенности его поведения.

Пример. Предположим, что мы вычисляем среднюю величину заработной платы в трех филиалах одной компании.

Запросы в три бухгалтерии дали следующее. В первом филиале средняя зарплата равна 67 000 рублей, во втором — 72 000 рублей, в третьем — 59 000 рублей.

Среднее арифметическое этих чисел равно 66 000 рублей. Это средняя зарплата по всей компании? Нет! Мы не знаем, сколько сотрудников в каждом филиале, а это важно. Запросим дополнительные сведения. В первом филиале работает 11 человек, во втором 9 человек, а в третьем 12 сотрудников. Теперь среднее посчитать можно:

$$\frac{11 \cdot 67\,000 + 9 \cdot 72\,000 + 12 \cdot 59\,000}{11 + 9 + 12} = 65\,406{,}25.$$

То есть 65 406 р. 25 к.

Полученное значение мало отличается от 66 000 рублей (отличие около 0,9%). Это произошло потому, что и зарплаты в трех филиалах мало отличаются. Возможно, зная это, опытный руководитель принял бы верное решение и без дополнительных уточнений, решив, что 66 000 рублей достаточно точная оценка. Но бухгалтерия не терпит погрешностей даже в 0,9%.

Среднее получилось больше, чем 59 000, но меньше, чем 72 000. Это не случайно — среднее по всей компании должно быть средним и для трех филиалов. Но это уже не так интуитивно. Иногда люди здесь ошибаются.

Недавно в крупной московской больнице проводился подсчет среднего числа дней, проведенных больными в отделении неврологии в течение года. Подсчет велся по всем больным: отдельно по «чужим» больным, поступившим из других отделений, и отдельно — по «своим» больным, госпитализированным сразу в неврологическое отделение. Заведующая отделением получила от статистического центра информацию. Среднее по «своим» равно 14,5 дня, по «чужим» 13,8, а по всем больным оно оказалось равно 14,8. Заведующая (не математик, хотя в свое время окончила математическую школу) задумалась, может ли такое быть? Решила, что не может, и стала задавать вопросы. Обнаружилось, что на протяжении нескольких лет компьютерная программа работает с ошибкой, но никто ничего раньше не замечал.

С помощью среднего арифметического часто удобно решать задачи на концентрации всяких растворов, столь нелюбимые школьниками.

Задача 201. В 6 литров 10-процентного раствора кислоты добавили 15-процентный раствор той же кислоты. В результате получился 12-процентный раствор. Сколько литров второго раствора добавили?

Решение. Получившаяся концентрация 12% — это среднее арифметическое концентраций обоих растворов. Примем объем второго раствора за x литров. Тогда

$$\frac{6\cdot 10+x\cdot 15}{6+x}=12.$$

В числителе — «сумма всех концентраций». А в знаменателе — общее число литров. Результат — среднее 12. Осталось решить уравнение:

$6\cdot 10+x\cdot 15=12(6+x)$; $3x=12$; $x=4$.

Ответ: 4.

Средняя скорость (среднее гармоническое)

Задача 202. Автомобиль проехал от города до деревни со средней скоростью 40 км/ч, а обратный путь он проделал со средней скоростью 60 км/ч. Какова средняя скорость автомобиля?

Замечание. Сначала нужно понять, что мы считаем средней скоростью. Разумно считать средней ту постоянную скорость, при которой автомобиль затратил бы на весь путь то же время, что он затратил в действительности.

Эта задача вызывает много трудностей. Большинство старшеклассников дают ответ 50 км/ч, хотя в учебниках шестого или седьмого класса такие задачи разбираются подробно. Забыли?

Решение. Обозначим весь путь S км. Время, затраченное на путь в деревню, равно $\frac{S}{40}$ ч. Время, затраченное на обратный путь, равно $\frac{S}{60}$ ч. На весь путь ушло $\frac{S}{40}+\frac{S}{60}=S\left(\frac{1}{40}+\frac{1}{60}\right)$ ч.

Значит, средняя скорость равна

$$v_{\text{ср.}} = \frac{2S}{S\left(\frac{1}{40}+\frac{1}{60}\right)} = \frac{2}{\frac{1}{40}+\frac{1}{60}} = 48\ (\text{км/ч}).$$

Как видим, расстояние роли не играет. Но ведь получилось не среднее арифметическое. Число $\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ или, что то же самое, $\dfrac{2ab}{a+b}$ называется средним гармоническим чисел a и b. Заметим, что ни a, ни b не должны равняться нулю.

Средний банковский процент

Банк А обещает 9 процентов годовых (см. главу 2) в первый год, а во второй год, если клиент не забирает вклад, процентная ставка повышается до 11%. Начисление процентов производится раз в год.

Банк Б также начисляет проценты раз в год, но процентная ставка по вкладу не меняется — всегда 10%.

Задача 203. В какой банк выгоднее поместить вклад сроком на два года?

Решение. Узнаем, чему равна средняя ставка в банке А. Первый год вклад умножится на $k_1 = 1{,}09$, а во второй год на $k_2 = 1{,}11$. Значит, за два года вклад вырастет в $k_1 \cdot k_2 = 1{,}09 \cdot 1{,}11 = 1{,}2099$ раз. Это то же самое, как если бы банк А каждый год умножал вклад на $\sqrt{1{,}2009} \approx 1{,}09995$, то есть давал бы ставку $9{,}995\%$. Это чуть меньше, чем 10%. Таким образом, можно немножко выиграть, если положить деньги в банк Б.

Обратили ли вы внимание на появление среднего значения? Для двух положительных чисел a и b величина $\sqrt{ab}$ называется средним геометрическим.

Медиана
и медианный представитель

Медиана — еще один пример числового среднего. Определение медианы следующее.

Число m называется медианой числового набора, если в наборе хотя бы половина чисел не меньше m и хотя бы половина чисел не больше m.

Задача 204. Найти медиану набора 1; 2; 4; 5; 7; 8; 8.

Решение. Числа уже упорядочены. Всего их 7. Значит, медианой будет «серединное» число 5. Ровно четыре числа не больше 5 (это числа 1, 2, 4 и само число 5). И ровно четыре числа не меньше 5 (само число 5, а также все последующие числа 7, 8 и 8).

Задача 205. Найти медиану набора чисел −0,3; −2; 1; 0; 0,3; −1; 1,2; 0,1; −0,2; 1,2.

Решение. Сначала числа нужно упорядочить:

$$-1; -2; -0{,}3; -0{,}2; 0; 0{,}1; 0{,}3; 1; 1{,}2; 1{,}2.$$

Всего чисел 10. Одного числа, стоящего посередине, нет. Не беда — возьмем два. Это числа 0 и 0,1 Медианой будет любое из них, а также любое число, расположенное между ними. Таким образом, медиан может быть много. Обычно в качестве медианы берут среднее арифметическое двух серединных чисел: $\frac{0+0{,}1}{2}=0{,}05$.

Но, повторим, можно взять и 0, или 0,1 или 0,03 и т.п.

Статистики — люди с фантазией. Они умеют при необходимости скрещивать разные средние между собой. Например, можно брать не медиану — середину упорядоченного ряда, а, скажем, медиану первой половины (первую квартиль). Или третью квартиль. А можно сначала отбросить первую и последнюю четверть значений и взять среднее арифметическое оставшихся значений и т.п.

Медиана выгодно отличается от среднего арифметического тем, что определяется средними по величине числами в наборе и не зависит от самых больших и самых малых. Говорят, что

медиана устойчива относительно выбросов. Почему это выгодно? Потому что самые большие и самые малые числа часто бывают ненадежными наблюдениями. Например, это могут быть ошибочные значения. Или не ошибочные, а просто сильно выдающиеся.

Задача 206. В таблице представлены данные о среднем расходе (сбросе воды в Мировой океан)* тринадцатью крупнейшими реками.

а) Найдите среднее арифметическое данных.

б) Найдите медиану данных.

в) Найдите медианного представителя (реку, соответствующую медиане).

г) Какое из этих найденных средних лучше описывает средний расход крупной реки?

	Река (речная система)	Средний расход (куб. м/с)
1	Амазонка	219000
2	Брахмапутра	19200
3	Енисей	18600
4	Конго	41800
5	Ла-Плата	25700
6	Лена	17100
7	Меконг	16000
8	Миссисипи	16200
9	Ориноко	30000
10	Риу-Негру	26700
11	Токантинс	13600
12	Чжуцзян	13600
13	Янцзы	31900

Решение. а) Сложим все данные о расходе и разделим на 13. Получим приблизительно 37 646,15 куб. м/с.

---

* Считается средний объем воды, проходящий за секунду через устье реки в течение периода наблюдений.

б) Упорядочим данные:

13600, 13600, 16000, 16200, 17100, 18600, **19200**, 25700, 26700, 30000, 31900, 41800, 219000.

Медианой является 7-е по счету значение в этом ряду: 19 200 куб. м/с.

в) Брахмапутра.

г) Медианный представитель нашелся. Медианный представитель найдется всегда (ведь мы помним, что медиану можно брать по-разному). А вот «представителя среднего арифметического» в таблице нет. И даже близкого ничего нет. Нет реки с расходом, близким к 38 000 куб. м/с. Среднее арифметическое в данном случае *ничего не описывает*. В данном случае это неудачный описательный показатель. Зато медиана действительно дает представление о расходе воды в типичной крупной реке.

Ответ: а) ≈ 37 646,15; б) 19 200; в) Брахмапутра; г) Медиана.

Медиана и среднее в этой задаче сильно отличаются из-за того, что есть выброс — значение, резко отличающееся от остальных. Это не ошибка. Амазонка действительно в 10 с лишним раз полноводнее самой полноводной из прочих рек. Но это ничего не меняет — Амазонка нетипична. Лучше ее выбросить из рассмотрения, если речь идет не о рекордах, а о типичных реках. Среднее арифметическое с этим не справляется. А медиана подходит — она устойчивая.

На свойстве устойчивости медианы основано восстановление старых фото и фильмов. Например, нужно быстро удалить со старой фотографии множество мелких царапин и черных точек. Отсканируем фото, разобьем все изображение на множество маленьких квадратиков и каждому квадратику сопоставим число — степень насыщенности цветом. Например, от 0 (нет цвета) до 255 (полная насыщенность). Теперь если в каждом квадрате заменить насыщенность медианой насыщенности девяти квадратиков (его самого и восьми соседних), то... повреждения исчезнут. Изображение станет чуть размытым, но целым. Теперь можно попробовать восстановить четкость изображения. Но это уже совсем другая математика.

До:

После:

Рис. Медианная фильтрация восстановила фото кота

События и вероятности

События, которыми полна окружающая нас жизнь, — это не вполне те события, которые изучает теория вероятностей. Можно написать философский трактат об отличиях. Скажем коротко — теория вероятностей, прежде чем изучать события, формализует их с помощью описания случайного эксперимента, в котором эти события могут происходить.

Жизнь ничего не формализует. Она заставляет принимать события как они есть — неочищенными от наслоений привходящих обстоятельств во всей пестроте бытия.

Однажды на уроке учитель привел пример события: купленная лампочка никогда не перегорит. С точки зрения теории вероятностей это вполне ясное событие. Но тут один восьмиклассник заявил, что не понимает, что это за событие. Ведь событие — это то, что можно увидеть, зафиксировать. — Сколько же я должен сидеть около этой лампочки, чтобы увидеть, что она никогда не перегорит?

Вот пример формального события, которое не является событием в бытовом смысле слова.

Обратный пример: «Цветет сирень». Казалось бы — все понятно. Но математик начнет нудно уточнять: где сирень? какого сорта? в каком временном промежутке? на каких почвах? Вся романтика потерялась, но без маломальски описанного эксперимента теория вероятностей отказывается считать цветение сирени событием.

Что значит описать эксперимент? Это значит определить все элементарные события, которые могут произойти, и их вероятности. Для пояснения обычно используют простейший эксперимент с бросанием монеты. Пойдем тем же путем: если бросают монету, то возможно всего лишь два элементарных события (исхода): «Орел» (О) и «Решка» (Р). В силу симметрии монеты разумно считать, что вероятности между этими событиями разделены поровну. И если весь эксперимент имеет вероятность 1, то каждому из исходов О и Р достается вероятность $\frac{1}{2}$.

При двукратном бросании монеты получаются четыре элементарных события ОО, ОР, РО и РР, и вероятность каждого будет $\frac{1}{4}$ — опять же в силу симметрии: никакое событие не хуже и не лучше любого другого из оставшихся трех.

Все остальные события комбинируются из этих четырех элементарных событий. Например, можно рассмотреть событие «Орел выпал хотя бы один раз». «Хотя бы один раз» означает один раз или больше. В данном случае — один или два раза.

Однажды знаменитый математик Даламбер писал статью о теории вероятностей для французской энциклопедии. Он посчитал исходы ОР и РО при бросании двух монет за один исход. «Тогда, — писал Даламбер, — всего может быть три исхода — «два орла», «две решки» и «орел и решка», а посему вероятность каждого равна 1/3». Это заблуждение вошло в историю под названием «Ошибка Даламбера».

Задача 207. Найдите вероятность события «Орел выпал хотя бы один раз» при двукратном бросании монеты.

Решение. Всего четыре элементарных исхода ОО, ОР, РО и РР. Вероятность каждого равна $\frac{1}{4}$. Событию A «Орел выпал хотя бы один раз» благоприятствуют три из них: ОО, ОР и РО. Значит, вероятность события A равна

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=3\cdot\frac{1}{4}=0{,}75.$$

Ответ: 0,75.

Если элементарные события равновозможны (как в этой задаче), то вместо сложения отдельных вероятностей можно просто разделить число благоприятствующих элементарных исходов на их общее число.

Задача 208. В чемпионате по гимнастике участвуют 50 спортсменок: 17 из России, 22 из США, остальные — из Китая. Порядок, в котором выступают гимнастки, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсменка, выступающая первой, окажется из Китая.

Решение. Здесь эксперимент состоит в выборе спортсменки, которая будет выступать первой. Элементарные события — сами спортсменки. Общее число элементарных событий $N = 50$. Событию A «Первой выступает спортсменка из Китая» благоприятствуют $N(A) = 50 - 22 - 17 = 11$ элементарных событий.

Найдем вероятность события A:

$$\mathrm{P}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{11}{50} = 0{,}22.$$

Ответ: 0,22.

Замечание. Важное обстоятельство — порядок выступлений определяется жребием. Если бы это было не так, то нельзя было бы утверждать, что все претендентки на первое выступление равновозможны. И тогда задачу нельзя было бы решить. Жребий определяет здесь случайность выбора и — стало быть — равновозможность.

Однажды, выступая с лекцией по элементарной вероятности перед учителями, преподаватель получил вопрос: «Хорошо, все понятно. А как быть, если мы хотим найти вероятность того, что китаянка будет выступать третьей?» Стоило больших трудов убедить часть собравшихся в том, что ничего не меняется. Нам нужно найти вероятность того, что китаянка окажется на какой-то одной определенной позиции, первой или третьей — не важно.

Задача становится несколько сложнее, если вопрос задать иначе: какова вероятность того, что первое и третье выступление будет принадлежать китаянкам?

Задача 209. Найти вероятность того, что при случайном распределении порядка выступлений первой и третьей будут выступать представительницы Китая.

Решение. Здесь как с двумя монетами — каждый элементарный исход состоит из двух случайных выборов. Общее число исходов в таком эксперименте: $N = 50 \cdot 49 = 2450$ (на первую позицию претендуют 50 спортсменок, а на третью — 49 оставшихся). Число исходов, благоприятствующих событию B «Обе позиции принадлежат спортсменкам из Китая», равно $N(B) = 11 \cdot 10 = 110$ (на первую позицию претендуют 11 китаянок, а на третью — 10 оставшихся). Все комбинации равновозможны в силу случайного выбора по жребию. Значит, вероятность события B можно найти как отношение:

$$P(B) = \frac{N(B)}{N} = \frac{110}{2450} = \frac{11}{245} \approx 0{,}045.$$

Ответ: 0,045.

Еще одна задача из открытого банка заданий ЕГЭ, которая традиционно вызывает большие затруднения.

Задача 210. В классе 26 учащихся. Среди них подруги Маша и Таня. Для какой-то надобности класс случайным образом делят на две группы по 13 человек в каждой. Найдите вероятность того, что Маша и Таня окажутся в одной группе.

Решение. Перечисление всех возможных способов распределения 26 человек по двум группам возможно, но требует некоторых комбинаторных знаний. Упростим описание эксперимента. Считаем, что у нас есть два пустых списка по 13 строчек в каждом. Будем «заполнять их учащимися». Предположим, что Маша попала в какой-то список (это, безусловно, так). Тогда случайный эксперимент сводится к тому, чтобы поместить Таню на какую-нибудь другую строчку в этих списках. Нас интересует событие A «Таня попала в ту же группу, где Маша». Когда Маша уже записана, Таня может случайным образом попасть на одну из $N = 25$ оставшихся строчек (одна занята Машей). Но в одном списке с Машей осталось $N(A) = 12$ строчек. Значит,

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{12}{25} = 0{,}48.$$

Ответ: 0,48.

О том, как важно внимательно читать условие

Часто в решении задач препятствием оказывается неверное понимание условия. Написано одно, но, читая задачу, человек почему-то видит другое. Может быть, потому что он подсознательно готов к какой-то ситуации и поэтому видит в условии то, чего там нет, и наоборот. Пример — задача про брак в массовом производстве.

Задача 211. При массовом производстве шариковых ручек в среднем девять ручек из ста, поступивших в продажу, имеют скрытый дефект. Найдите вероятность того, что случайно выбранная в магазине ручка не имеет дефектов.

Замечания.

1. Разумно считать, что скрытый дефект — это дефект, не найденный перед продажей. Иначе ручка не попала бы в магазин. Тем не менее этот дефект может проявиться позже (разойдется незаметная трещина в корпусе, ручка внезапно перестанет писать и т.п.).
2. Фраза «в среднем девять из ста» в точности означает, что вероятность дефекта равна девять сотых: 0,09.

Решение. Если вероятность выбрать дефектную ручку равна 0,09, то вероятность противоположного события «Выбранная ручка не имеет дефектов» равна $1 - 0{,}09 = 0{,}91$.

Ответ: 0,91.

А вот похожая задача, но иная по смыслу.

Задача 212. При продаже шариковых ручек в среднем на сто качественных ручек приходится девять ручек со скрытым дефектом. Найдите вероятность того, что случайно выбранная в магазине ручка не имеет дефектов.

Замечание. Несмотря на внешнее сходство с предыдущей, задача другая. Здесь качественные ручки (без дефектов) противопоставлены ручкам с дефектами. Если прежде мы считали, что 9 дефектных ручек входят в общее количество 100, то здесь это не так. Всего имеется 109 ручек, из которых 9 в среднем имеют дефект.

Решение. Из 109 ручек в среднем 100 ручек не имеют дефектов. Значит, вероятность выбрать качественную ручку равна $\frac{100}{109} \approx 0{,}92$. *Ответ*: 0,92.

Все, один или хотя бы один

Вспомним наши упражнения в построении отрицаний. Например, когда мы строили отрицание к утверждению «Все пингвины живут в Антарктиде», мы переходили от общности «все» к утверждению о существовании контрпримера: «Хотя бы один пингвин живет не в Антарктиде». Эти упражнения пригодятся нам в построении противоположных событий. Событие, противоположное событию A, это такое событие $\overline{A}$, которое наступает, если не наступает A.

Внимание! Не будем путать противоположные утверждения и противоположные события. Как мы помним, противоположные утверждения друг друга не отрицают, а вот противоположные события — да, отрицают. Такая уж сложилась терминология, извините.

Пример. Эксперимент состоит в бросании монеты. Событие A «Выпал орел». Противоположное событие $\overline{A}$ «Выпал не орел», то есть «Выпала решка».

Следующий пример показывает, что между построением отрицаний и противоположных событий есть связь.

Пример. Стрелок стреляет по мишени пять раз. Событие A «Все выстрелы успешны». Отрицание $\overline{A}$ выглядит так: «Хотя бы один выстрел неудачен», то есть «Хотя бы один раз стрелок промахнулся». Противоположные события устроены похоже на взаимно отрицающие друг друга утверждения.

Теория вероятностей — раздел математики, наиболее близкий к жизни. Этот факт не обошли стороной писатели. Кто только не рассуждал о вероятностях на страницах своих романов: от Эдгара По до Кира Булычева. Рассуждения иногда неудачные. Вот примечательный фрагмент из знаменитого романа Юлиана Семенова «Семнадцать мгновений весны».

Штирлиц после сеанса связи с центром едет по лесу. Начинается бомбежка. *«Поехали, машинка», — подумал он по-русски и включил радио. Передавали легкую музыку. Во время налетов обычно передавали веселые песенки. Это вошло в обычай: когда здорово били на фронте или сильно долбали с воздуха, радио передавало веселые, смешные программы. «Ну, едем, машинка. Быстро поедем, чтобы не попасть под бомбу.*

Бомбы чаще всего попадают в неподвижные цели. Поедем со скоростью семьдесят километров — значит, вероятность попадания уменьшится именно в семьдесят раз...»

Не нужно быть математиком, чтобы понять, что такое рассуждение Штирлица ошибочно.

Задачи к главе 8

Задача 213. В случайном эксперименте бросают три игральные кости. Найдите вероятность того, что сумма выпавших очков равна 14. Результат округлите до сотых.

Задача 214. В случайном эксперименте симметричную монету бросают трижды. Найдите вероятность того, что решка выпадет ровно один раз.

Задача 215. Игральный кубик бросают дважды. Сколько элементарных исходов опыта благоприятствуют событию

$$A = \{\text{сумма очков равна } 7\}?$$

Задача 216. В случайном эксперименте симметричную монету бросают трижды. Найдите вероятность того, что наступит исход ООР (в первый и второй разы выпадает орел, в третий — решка).

Задача 217. При изготовлении подшипников диаметром 64 мм вероятность того, что диаметр будет отличаться от заданного не больше чем на 0,01 мм, равна 0,963. Найдите вероятность того, что случайный подшипник будет иметь диаметр меньше чем 63,99 мм, или больше чем 64,01 мм.

Задача 218. При изготовлении подшипников диаметром 71 мм вероятность того, что диаметр будет отличаться от заданного не больше чем на 0,01 мм, равна 0,987. Найдите вероятность того, что случайный подшипник будет иметь диаметр меньше чем 70,99 мм, или больше чем 71,01 мм.

Задача 219. Фабрика выпускает сумки. В среднем на 173 качественные сумки приходится 7 сумок, имеющих скрытые дефекты. Найдите вероятность того, что выбранная в магазине сумка окажется с дефектами. Результат округлите до сотых.

Задача 220. В среднем из 2000 садовых насосов, поступивших в продажу, 12 подтекают. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает.

Задача 221. Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,02. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля. Вероятность того, что система забракует неисправную батарейку, равна 0,95. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,01. Найдите вероятность того, что случайно выбранная изготовленная батарейка будет забракована системой контроля.

Задача 222. В Волшебной стране бывает два типа погоды: хорошая и отличная, причем погода, установившись утром, держится неизменной весь день. Известно, что с вероятностью 0,8 погода завтра будет такой же, как и сегодня. 14 октября погода в Волшебной стране хорошая. Найдите вероятность того, что 17 октября в Волшебной стране будет отличная погода.

Задача 223. Всем пациентам с подозрением на гепатит делают анализ крови. Если анализ выявляет гепатит, то результат анализа называется *положительным*. У больных гепатитом пациентов анализ дает положительный результат с вероятностью 0,8. Если пациент не болен гепатитом, то анализ может дать ложный положительный результат с вероятностью 0,03. Известно, что 75% пациентов, поступающих с подозрением на гепатит, действительно больны гепатитом. Найдите вероятность того, что результат анализа у пациента, поступившего в клинику с подозрением на гепатит, будет положительным.

Задача 224. В кармане у Саши было четыре конфеты — «Коровка», «Мишка», «Ласточка» и «Василек», а также ключи от квартиры. Вынимая ключи, Саша случайно выронил из кармана одну конфету. Найдите вероятность того, что потерялась конфета «Мишка».

Задача 225. Механические часы с двенадцатичасовым циферблатом в какой-то момент сломались и перестали идти.

Найдите вероятность того, что часовая стрелка остановилась, достигнув отметки 1, но не дойдя до отметки 7.

Задача 226. Вероятность того, что батарейка бракованная, равна 0,02. Покупатель в магазине выбирает случайную упаковку, в которой две такие батарейки. Найдите вероятность того, что обе батарейки окажутся исправными.

Задача 227. На фабрике керамической посуды 30% произведенных тарелок имеют дефект. При контроле качества продукции выявляется 50% дефектных тарелок. Остальные тарелки поступают в продажу. Найдите вероятность того, что случайно выбранная при покупке тарелка не имеет дефектов. Ответ округлите до сотых.

Задача 228. В магазине три продавца. Каждый из них занят с клиентом с вероятностью 0,5 независимо от других продавцов. Найдите вероятность того, что в случайный момент времени все три продавца заняты одновременно.

Задача 229. По отзывам покупателей Андрей Андреевич оценил надежность двух интернет-магазинов. Вероятность того, что нужный товар доставят из магазина А, равна 0,84. Вероятность того, что этот товар доставят из магазина Б, равна 0,8. Андрей Андреевич заказал товар сразу в обоих магазинах. Считая, что интернет-магазины работают независимо друг от друга, найдите вероятность того, что ни один магазин не доставит товар.

Задача 230. Из районного центра в деревню ежедневно ходит автобус. Вероятность того, что в понедельник в автобусе окажется меньше 22 пассажиров, равна 0,92. Вероятность того, что окажется меньше 11 пассажиров, равна 0,45. Найдите вероятность того, что число пассажиров будет от 11 до 21.

Задача 231. Вероятность того, что новый ноутбук в течение года поступит в гарантийный ремонт, равна 0,072. В некотором городе из 1000 проданных ноутбуков в течение года в гарантийную мастерскую поступило 76 штук. На сколько отличается частота события «гарантийный ремонт» от его вероятности в этом городе?

Задача 232. Чтобы поступить в институт на специальность «Переводчик», абитуриент должен набрать на ЕГЭ не менее 75 баллов по каждому из трех предметов — математика, русский язык и иностранный язык. Чтобы поступить на специальность «Таможенное дело», нужно набрать не менее 75 баллов по каждому из трех предметов — математика, русский язык и обществознание.

Вероятность того, что абитуриент И. получит не менее 75 баллов по математике, равна 0,9, по русскому языку — 0,6, по иностранному языку — 0,8 и по обществознанию — 0,6.

Найдите вероятность того, что И. сможет поступить на одну из двух упомянутых специальностей.

Задача 233. На борту самолета 23 кресла расположены рядом с запасными выходами и 25 — за перегородками, разделяющими салоны. Все эти места удобны для пассажира высокого роста. Остальные места неудобны. Пассажир З. высокого роста. Найдите вероятность того, что на регистрации при случайном выборе места пассажиру З. достанется удобное место, если всего в самолете 100 мест.

ГЛАВА 9. ГРАФИКИ ФУНКЦИИ И ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Чтение графиков

Удивительно — учебники математики обозначают функцию то $y = f(x)$, то просто $f(x)$, то даже одной буквой f или y. Почему не писать каждый раз одинаково? Почему пишут то $f(3) = 5$, то «$y = 5$ в точке 3»?

В любом языке есть синонимы. Синонимы обогащают язык, давая возможность сказать одно и то же разными словами, подчеркивая смысловые нюансы. Математический язык не исключение. Он имеет свои синонимы, свои «речевые обороты», которые помогают выражаться лаконично и доходчиво.

Иногда выражение $y = f(x)$ означает формулу, которая задает функцию, иногда — саму функцию, а иногда — ее график, то есть некоторую линию на плоскости. И ничего. Это удобно и никому не мешает. Ведь, если вдуматься, с нашей точки зрения между формулой $y = f(x)$ и линией $y = f(x)$ не должно быть разницы — они определяют одну и ту же функцию $y = f(x)$. Гораздо хуже, если бы мы писали одни значки для функций, другие — для формул и совсем отдельные — для графиков. Поверьте, когда математический текст написан таким образом (а есть любители!), читать его вовсе не легко и не приятно.

Дж. Литлвуд в книге «Математическая смесь» привел пример математического текста, написанного с использованием очень точного и строгого языка. Очерк получился едким и смешным.

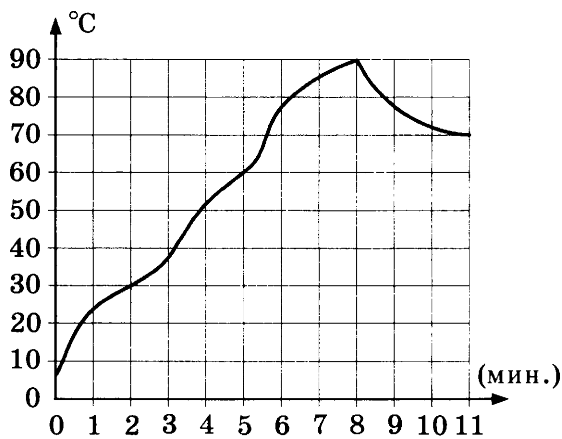
На практике график функции чаще всего описывает течение какого-нибудь процесса или изменение какой-нибудь величины. Обычно бывает нужно найти одно из трех.

1. Значение величины. Его можно непосредственно увидеть на графике.

2. Значение аргумента при данной величине. Это тоже считывается непосредственно с графика.

3. Скорость изменения величины. Ее показывает производная.

Задача 234. На графике показано изменение температуры в зависимости от времени в процессе разогрева двигателя легкового автомобиля при температуре окружающего воздуха 10 °С. На оси абсцисс откладывается время в минутах, прошедшее от запуска двигателя, на оси ординат — температура двигателя в градусах Цельсия. Когда температура достигает определенного значения, включается вентилятор, охлаждающий двигатель, и температура начинает понижаться.



Определите по графику:

а) температуру двигателя через 2 минуты после запуска;

б) температуру двигателя через 5 минут после запуска;

в) сколько минут прошло от момента запуска двигателя до включения вентилятора;

г) средний прирост температуры (градусов в минуту) на протяжении третьей, четвертой и пятой минут работы двигателя;

д) средний прирост температуры (градусов в минуту) на протяжении 6-й–11-й минут работы двигателя.

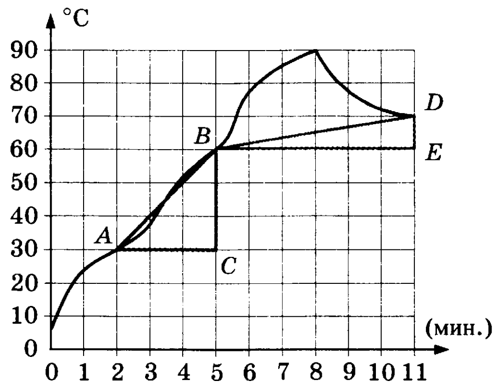
Решение. а) В точке 2 значение равно 30 °С; б) в точке 5 значение равно 60 °С; в) температура начала понижаться по истечении 8 минут.

С этим все, надеемся, понятно. Перейдем к пунктам г) и д).

г) За три минуты двигатель разогрелся на 60 − 30 = 30 (°C). Следовательно, средний прирост равен $\frac{30}{3} = 10$ (°C /мин).

Аналогично выполняется пункт д). Невзирая на то, что в конце указанного периода температура падала, все же к концу периода (начало 11-й минуты) она была выше, чем в начале 6-й минуты. Общий прирост составил 10 °C, а средний прирост за 6 минут равен $\frac{5}{3}$ (°C /мин).

Собственно, для вычисления среднего прироста температуры нам не требуется знать, как вела себя температура внутри промежутка. Достаточно знать начальное и конечное значение. Пометим их на рисунке точками A и B и построим прямоугольный треугольник ACB.



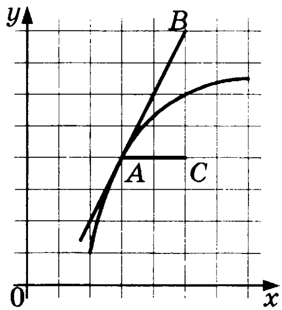
Второй такой же треугольник BED построим для второго интервала — из пункта д) решенной нами задачи. Вычисляя средний прирост температуры для первого интервала, мы делим катет BC на катет AC. Иными словами, мы находим тангенс угла BAC в треугольнике, у которого гипотенузой является хорда AB. Может показаться, что угол BAC равен 45°, а поэтому тангенс должен равняться 1. Так это обман зрения. Обратите внимание — масштабы разные: по оси ординат масштаб в 10 раз меньше, чем по оси абсцисс. Значит, и тангенс «зрительно» получается в 10 раз меньше. Кажется 1, а на самом деле $\text{tg}\angle BAC = 10$.

Мы сейчас увидели то, о чем уже говорили в главе 5, — тангенс играет важную роль в исследовании функций.

Производная

При сложении двух линейных функций, как мы отмечали (см. задачи 166 и 167), тангенсы углов наклона их графиков тоже складываются. То же самое происходит не только с линейными функциями, но и с другими, у которых графики — кривые линии. Нужно только понять, что такое угол между кривой линией и осью абсцисс.

Если нужно измерить угол наклона кривой линии к оси абсцисс в какой-то точке, вместо кривой рассматривают касательную к этой кривой. На рисунке угол BAC равен углу наклона графика к оси абсцисс в точке A.

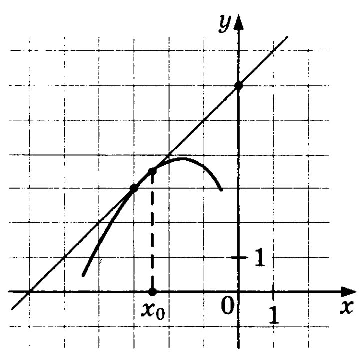


Тангенс угла наклона графика функции в точке к оси абсцисс называют производной этой функции в этой точке.

Если функция обозначена $y = f(x)$, то производную обычно обозначают $y = f'(x)$.

Иногда производную обозначают $\frac{df}{dx}$. Это обозначение подчеркивает, что производная — отношение катетов некоторого треугольника.

Задача 235. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику в точке x_0. Найдите значение производной функции в точке x_0.



Производная в точке существует, если в этой точке к графику функции можно провести наклонную или горизонтальную касательную.

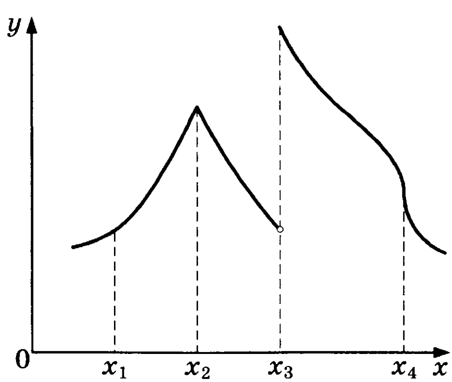
Если касательной в какой-то точке нет, то нет и угла наклона графика, стало быть, нет тангенса этого угла, а значит, нет и производной.

Может случиться и так, что касательная есть, но вертикальная. Тогда она образует с осью абсцисс прямой угол, а тангенс прямого угла не существует. Снова нет производной.

В обоих таких случаях (касательной нет или она вертикальна) говорят, что в этой точке производная не существует или, по-другому, что функция в этой точке *не дифференцируема*.

На рисунке показан график некоторой функции $f(x)$. В точке x_1 производная $f'(x_1)$ существует, поскольку есть наклонная касательная. В точке x_2 производная не существует, поскольку в этой точке график имеет излом. В точке x_3 производной нет, поскольку в этой точке функция имеет разрыв. А в точке x_4 касательная есть, но она вертикальна. Производная тоже не существует.

Итак, в точках x_2, x_3 и x_4 функция не дифференцируема, а в остальных точках показанного промежутка — дифференцируема.



Связь между производной и поведением функции

Представим себе человечка (альпиниста), который проложил себе маршрут по графику функции слева направо и потихонечку двигается, преодолевая препятствия.

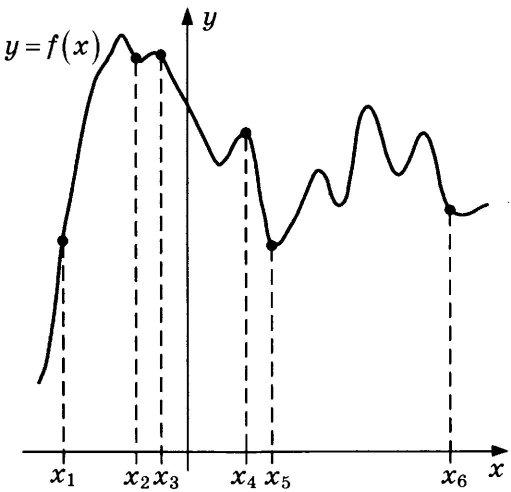
Если в какой-то точке производная не существует (возможные причины — излом, разрыв или «вертикальность»), то человечку приходится туго: он натыкается на острый край, падает в пропасть или лезет на вертикальную стенку.

В остальных точках движение происходит гладко. Если производная положительна, то положителен угол подъема, альпинист поднимается, то есть функция возрастает. Если производная отрицательна, то альпинист идет вниз по склону, то есть функция убывает.

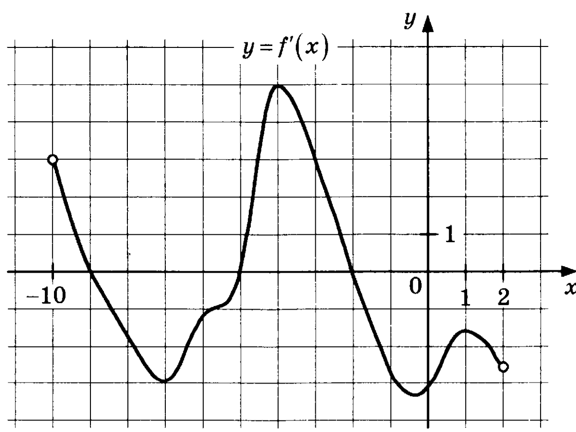
Во всех дальнейших рассуждениях мы будем предполагать, что производная у функции существует во всех точках, где нам это нужно. Иначе придется все время делать оговорку, что если производной нет, то в этой точке функцию нужно исследовать отдельно другими способами, про которые ничего не известно.

По производной функции можно судить о том, как эта функция себя ведет в точке или на промежутке. Если производная на каком-то промежутке положительна, то функция на этом промежутке возрастает. Если производная отрицательна на промежутке, то функция на этом промежутке убывает.

Задача 236. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и шесть точек на оси абсцисс: x_1, x_2, x_3, ... , x_6. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ положительна?

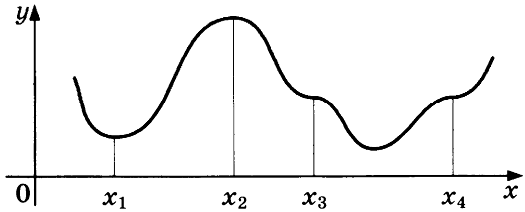


Задача 237. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-10; 2)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = -2x - 11$ или совпадает с ней.



Точки экстремума

Особенно интересны точки, в которых производная равна нулю. Функция в этих точках не возрастает и не убывает, то есть касательная к графику горизонтальна. Такие точки иногда называют стационарными. На рисунке показаны три вида стационарных точек.

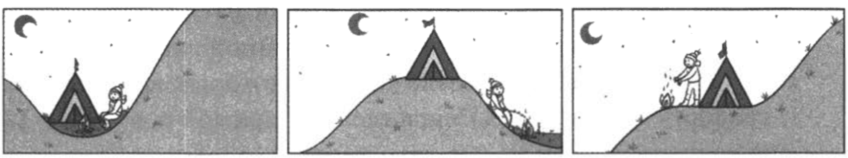


x_1 — точка минимума.

x_2 — точка максимума.

x_3 и x_4 — «площадки».

Во всех трех случаях у альпиниста есть возможность сделать привал, примостив палатку на крохотном горизонтальном участке.



Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

Связь между производной и поведением функции была бы совершенно бесполезной, если бы производную было трудно вычислять. Но, к счастью, это не так. Производную можно найти, пользуясь таблицей производных и несложными правилами.

Задача 238. Найти точки максимума и точки минимума функции $y=\frac{1}{3}x^3-4x+5.$

Решение. Вычислим производную по правилам дифференцирования: $y' = x^2 - 4$.

Приравняем производную к нулю: $x^2 - 4 = 0$, откуда $x = -2$ или $x = 2$.

Мы пока не знаем, что происходит в найденных точках. Чтобы разобраться, возьмем дополнительные точки −3, 0 и 3 и посмотрим, какие знаки имеет производная в этих точках:

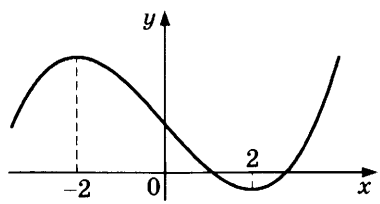
$y'(-3) = (-3)^2 - 4 = 5 > 0,$

$y'(0) = -4 < 0,$

$y'(3) = 3^2 - 4 = 5 > 0.$

Следовательно, при $x < -2$ функция возрастает, при $-2 < x < 2$ убывает, а при $x > 2$ — снова возрастает. Это возможно, только если график выглядит так, как показано на рисунке. Не обязательно изображать график точно. Достаточно лишь схематичного наброска, чтобы понять, как и где возрастание сменяется убыванием и наоборот. Из схемы видно, где максимум, а где минимум.

Ответ: $x = -2$ — точка максимума, а $x = 2$ — точка минимума.



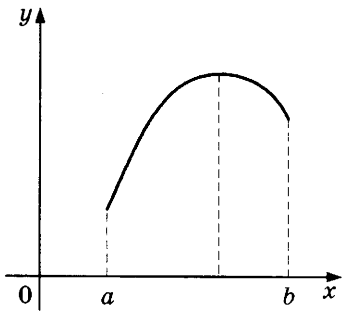
Чтобы найти точки минимума или максимума, нужно найти, в каких точках производная меняет знак с минуса на плюс и наоборот. Заучивать правила не обязательно — намного проще сделать схему графика, из которой видно, где именно точки максимума, а где — точки минимума.

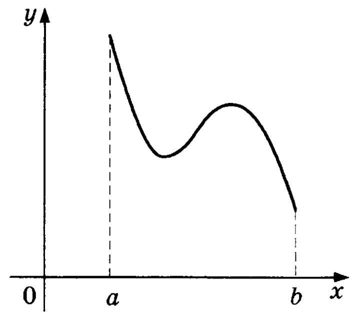
Точкой минимума (максимума) называют абсциссу, то есть значение x. Печальный опыт показывает, что вместо этого школьники часто ищут значение в точке минимума (максимума), то есть y, а иногда — координаты точки на графике. Запомните: когда речь идет о функциях, то слово «точка» означает x на прямой абсцисс, если явно не сказано что-то иное.

Задача 239. Найдите наибольшее значение функции $y = (x^2 - 3x - 3)e^x$ на отрезке $[-1; 4]$.

Предпошлем решению рассуждение. Представим, что мы рисуем график непрерывной дифференцируемой функции.

Где может быть наибольшее значение, то есть самая высокая точка графика? На рисунке показаны два возможных случая: наибольшее значение может быть в точке максимума или в одном из концов отрезка (возможно, в обоих сразу).





Это соображение наводит на мысль. Нужно найти точки максимума (если они есть) и сравнить значения функции в этих точках и в концах отрезка. Более того, если по дороге у нас появятся лишние точки — не страшно. Часто проще проверить все подозрительные точки, чем сложными рассуждениями выяснять, в какой из них функция имеет максимум.

Решение. Вычислим производную:

$$y' = (2x-3)e^x + (x^2-3x-3)e^x = (x^2-x-6)e^x$$

и приравняем ее к нулю: $(x^2-x-6)e^x = 0$, откуда $x = -2$ или $x = 3$.

Из двух найденных подозрительных точек только точка $x = 3$ принадлежит отрезку $[-1; 4]$. Следовательно, нужно найти наибольшее из чисел $y(-1)$, $y(3)$ и $y(4)$:

$y(-1) = (1+3-3)e^{-1} = \frac{1}{e}$;

$y(3) = (9-9-3)e^3 = -3e^3$;

$y(4) = (16-12-3)e^4 = e^4$.

Самое большое число последнее.

Ответ: наибольшее значение равно $e^4 \approx 54{,}6$.

Чтобы найти наибольшее (наименьшее) значение дифференцируемой функции на отрезке, нужно сравнить значения этой функции в концах отрезка и в точках этого отрезка, где производная обращается в нуль. Сравнив, нужно выбрать наибольшее (наименьшее) из них.

Заметим, что описанный алгоритм поиска наибольшего значения годится только для функции на отрезке, то есть тогда, когда можно рассматривать значения функции и в крайних точках промежутка, и во всех точках между ними.

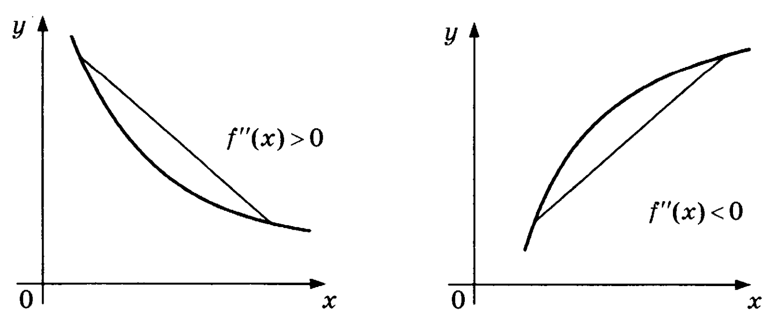
Физический смысл производной и второй производной

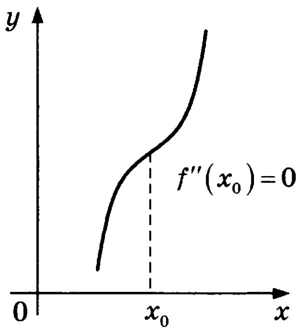
Если мы привыкли к тому, что производная — тоже функция, то нас уже не удивит, что у нее может быть своя производная. Производную от производной называют второй производной. Обозначают $f''(x)$. Вторую производную труднее «заметить на графике» функции $f(x)$, чем первую, но кое-что все же видно. Если первая производная отвечает за возрастание и убывание, то вторая — за характер изгиба графика. На рисунке показаны три случая.

$f'' > 0$. График функции «выгнут вниз»: хорда над графиком.

$f'' < 0$. График функции «выгнут вверх»: хорда под графиком.

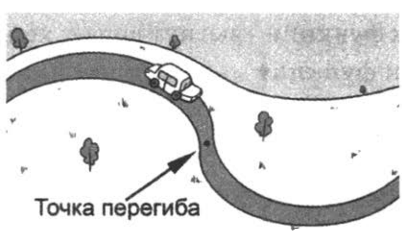
$f''(x_0) = 0$. В точке x_0 функция меняет свой изгиб. Такую точку называют точкой перегиба.





Чтобы понять, что значит «точка перегиба» и что в ней происходит, возьмите кусок гибкой проволоки и согните из него крючок в виде латинской буквы «S».Вы будете гнуть один конец в одну сторону, а другой — в другую. Будет место, где изгиба нет. Ни туда, ни сюда. Это и есть точка перегиба.

Другая аналогия: представьте, что по графику функции, как по шоссе, едет автомобильчик. Сначала дорога забирает вправо, а потом — влево. Водитель крутит руль, следуя дороге. В какой-то момент, перекладывая руль справа налево, водитель поставит его прямо. Это точка перегиба — точка, в которой дорога «спрямляется».



С физической точки зрения ни первая, ни вторая производная тоже не содержат тайн. Если $f(t)$ — путь, пройденный телом или точкой за время t, то $f'(t)$ — его скорость, а $f''(t)$ — ускорение в момент t.

Вы наверняка видели счетчик пройденного пути в автомобиле (одометр). Этот счетчик показывает пройденный путь в километрах. А в это время спидометр показывает скорость, то есть производную пройденного пути.

Задача 240. Тело движется по закону $s(t)=t+\frac{1}{2}t^2$. Эта формула определяет путь s, пройденный телом за время t. Для определенности можно считать, что путь измеряется в метрах, а время — в секундах. Найдите скорость и ускорение тела в момент $t = 2$ с.

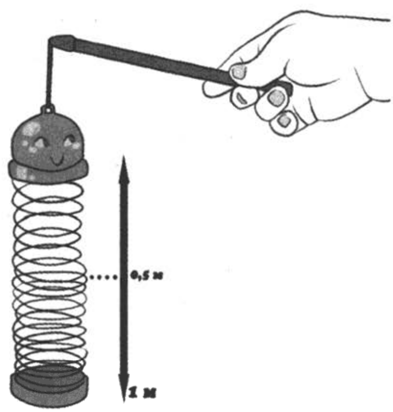
Решение. Нужно найти первую и вторую производные:

$s'=1+t$, $s''=1$.

В момент времени $t=2$ скорость равна $v=s'(2)=1+2=3$ (м/с), а ускорение постоянно и равно 1 м/с^2 в любой момент времени, в частности, при $t = 2$.

Ответ: 3 м/с и 1 м/с^2.

Задача 241. Пластиковая игрушка-пружина колеблется вверх-вниз. Один ее конец закреплен, а второй опускается с высоты 1 м до земли и снова поднимается на высоту 1 м каждую секунду. С каким ускорением конец пружины проходит уровень 0,5 м?



Решение. Задача сложная, но не с вычислительной точки зрения, а с точки зрения описания движения. Можно принять в качестве очевидного факта, что движение конца пружины происходит по синусоидальному закону:

$$h = 0{,}5 + 0{,}5\sin 2\pi t.$$

Почему так? В начальный момент $t = 0$ получаем:

$$h = 0{,}5 + 0{,}5\sin 0 = 0{,}5 \text{ (м)}.$$

Происходят колебательные движения вверх-вниз, причем каждые полсекунды конец пружины возвращается на высоту 0,5 м: один раз по пути вниз, а другой раз — по пути вверх. Это и означает, что каждую секунду происходит полное колебание. При этом наибольшая высота будет 1 м ($t = 0{,}25$ с, 1,25 с и т.д.), а наименьшая высота — 0 м (при $t = 0{,}75$ с, 1,75 с и т.д.). Модель есть.

Решение. Найдем первую и вторую производные: $h' = \pi\cos 2\pi t$, $h'' = -2\pi^2 \sin 2\pi t$.

При $\sin t = 0$ (как раз, когда конец пружины проходит высоту 0,5 м) находим, что ускорение отсутствует: $h''(0) = -2\pi^2 \cdot 0 = 0$ (м/с^2). Это легко объяснить с физической точки зрения. На высоте 0,5 м пружина находится в свободном состоянии — она не сжата и не растянута. Значит, в этот момент силы упругости пружины отсутствуют. Нет силы — нет и ускорения.

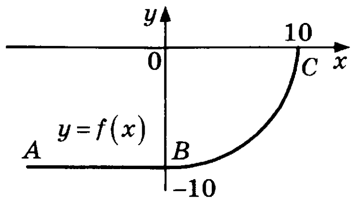
Ответ: без ускорения.

Американские горки и трамвайные пути

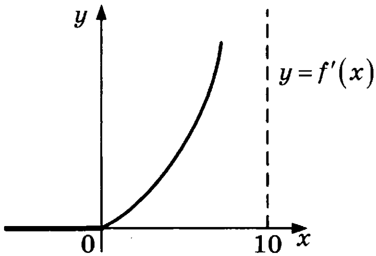
В XIX веке железнодорожники столкнулись с неприятным и поначалу непонятным явлением — поезда сходили с рельсов без видимых причин. Вскоре все разъяснилось. Вообразим вагончик на аттракционе «американские горки». Представим, что вагончик движется по графику некоторой функции, как по рельсам. Вот этот график-рельсы нам и нужно «проложить».

Вагончик разгоняется по горизонтали из точки A до точки B, а затем должен начаться подъем в точку C. Казалось бы, все просто: нужно на участке BC подобрать подходящую дугу. Например, дугу окружности радиусом 10 м. Введем удобным образом систему координат (см. рисунок) и будем считать, что вагончик движется по графику функции $y = f(x)$.

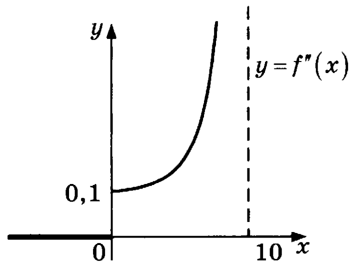
Тогда на отрезке AB получаем, что $f(x) = -10$, а на отрезке BC $f(x) = -\sqrt{100 - x^2}$.



а)



б)



в)

Нас интересует точка соединения прямой и дуги — точка B, то есть $x = 0$.

Казалось бы, все хорошо — соединение гладкое, неприятностей ждать не следует, у пассажиров будет захватывать дух, они будут визжать от удовольствия и страха, находясь в совершенной безопасности. Но... Найдем вторые производные обеих функций:

При $x < 0$:

$$f''(x) = 0.$$

При $x > 0$:

$$f''(x) = \left(\frac{x}{\sqrt{100 - x^2}}\right)' = \frac{100}{\sqrt{100 - x^2}^{\,3}}.$$

При $x = 0$ эта формула дает $0{,}1$.

На рисунке показаны три графика — сама функция $y = f(x)$ из двух кусков (а), производная (б) и вторая производная (в). Излом на графике производной уже говорит о том, что в нуле вторая производная не существует. Разрыв на графике (в) подтверждает это печальное обстоятельство.

Что же печального? Вспомним, что вторая производная — это ускорение. А что такое ускорение? Это приложенная к телу сила, деленная на его массу. Значит, если вертикальное ускорение в точке $x = 0$ появляется скачком, внезапно, то так же внезапно появляется сила, действующая на вагончик. Пассажиры должны в этот момент испытывать шок — как будто снизу по вагончику ударили огромной кувалдой. Такой же удар испытывают рельсы. Разок-другой прокатились и, глядишь... все развалилось. Да и после первого раза пассажиры будут как пришибленные... Хотя, почему как?

Такая же ситуация и с железнодорожным путем, только удар не снизу, а сбоку на повороте.

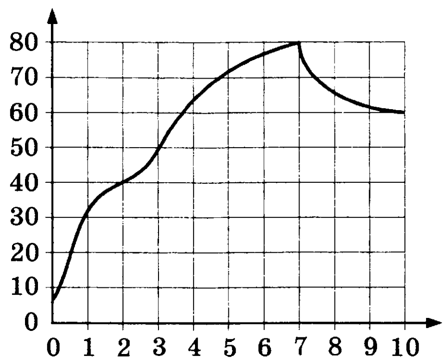
Значит, при строительстве рельсового пути нельзя соединять прямую с дугой окружности. И вообще, разные дуги нужно очень осторожно соединять в один путь, даже если на вид все гладко и красиво. Нужно следить, чтобы вторые производные в точке сочленения совпадали. А лучше — чтобы совпадали третьи, четвертые. Вообще — чем больше, тем лучше. Прокладывание рельсов — целое математическое искусство.

Проблема «нестыковки производных» плохо решается для городского трамвая. Ведь трамвайные рельсы часто прокладываются на существующих перекрестках, где форму кривой поворота не изменишь в угоду производным. Поворот — он такой, какой он есть. И приходится класть рельсы не по науке, а как получается. Поэтому трамваи перед поворотами очень сильно замедляют ход, но все равно на поворотах скрежещут, дребезжат и раскачиваются.

За «стыковками производных» нужно следить не только при укладке рельсов. Швейные машины, автомобильные двигатели полны всевозможных кулачковых механизмов: одна деталь скользит по другой (кулачку). Очень важен профиль кулачка. Если он состоит из кусков разных кривых, то встает вопрос согласования в точках соединения. Чем лучше согласование, тем тише, надежнее и долговечнее работает устройство. **В одном рекламном проспекте фирмы BMW написано, что профиль кулачков на газораспределительном валу двигателя BMW имеет 25 непрерывных производных в каждой точке.**

Задачи к главе 9

Задача 242. На графике изображена зависимость температуры от времени в процессе разогрева двигателя легкового автомобиля. На горизонтальной оси отмечено время в минутах, прошедшее с момента запуска двигателя, на вертикальной оси — температура двигателя в градусах Цельсия.



Пользуясь графиком, поставьте в соответствие каждому интервалу времени характеристику температуры.

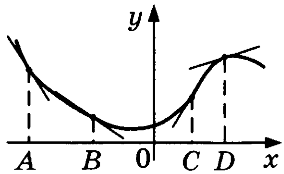
ИНТЕРВАЛЫ	ХАРАКТЕРИСТИКИ
А) 0–1 мин.	1) самое быстрое падение температуры
Б) 5–7 мин.	2) самое медленное падение температуры
В) 7–8 мин.	3) самый быстрый рост температуры
Г) 9–10 мин.	4) температура роста и на всем интервале была выше 70 °C

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

А	Б	В	Г

Задача 243. На рисунке изображены график функции и касательные, проведенные к нему в точках с абсциссами A, B, C и D.



В правом столбце указаны значения производной функции в точках A, B, C и D. Пользуясь графиком, поставьте в соответствие каждой точке значение производной функции в ней.

ТОЧКИ	ЗНАЧЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ
А) A	1) 1,55
Б) B	2) −1,5
В) C	3) 0,3
Г) D	4) −0,7

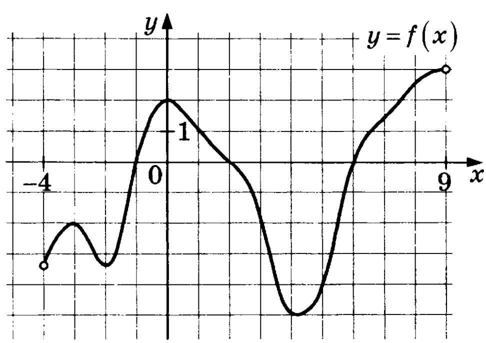
В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

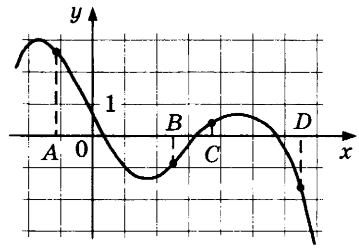
А	Б	В	Г

Задача 244. Прямая $y = 6x + 10$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 3x + 4$. Найдите абсциссу точки касания.

Задача 245. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале (−4; 9). Определите количество целых точек, в которых производная функции положительна.



Задача 246. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и отмечены точки A, B, C и D на оси Ox. Пользуясь графиком, поставьте в соответствие каждой точке характеристики функции и ее производной.



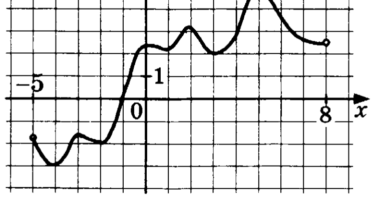
ТОЧКИ	ХАРАКТЕРИСТИКИ
А) A	1) значение функции в точке положительно, а значение производной функции в точке отрицательно.
Б) B	2) значение функции в точке отрицательно, значение производной функции в точке положительно.
В) C	3) значение функции в точке положительно, и значение производной функции в точке положительно.
Г) D	4) значение функции в точке отрицательно, и значение производной функции в точке отрицательно.

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

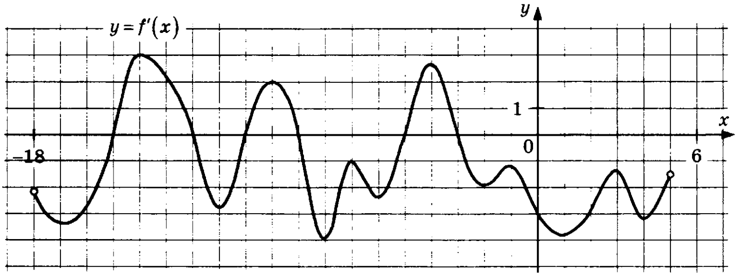
Ответ:

А	Б	В	Г

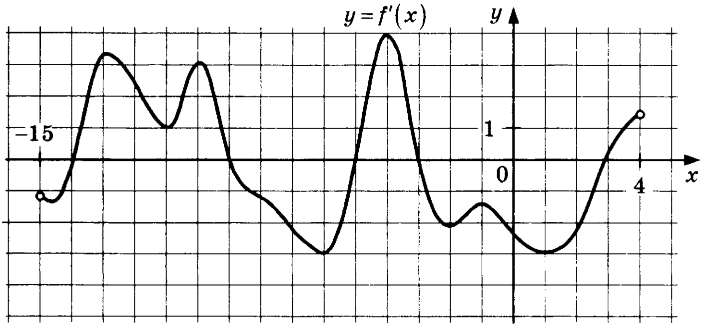
Задача 247. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-5; 8)$. В какой точке отрезка $[-1; 3]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?



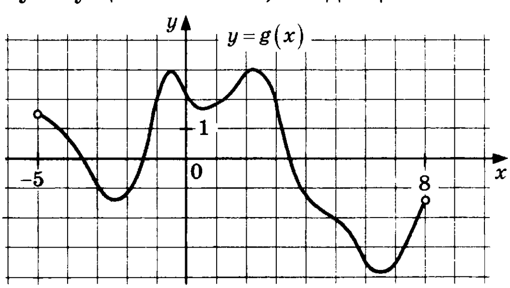
Задача 248. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-18; 6)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-17; 1]$.



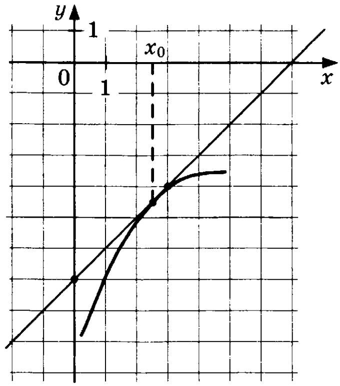
Задача 249. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-15; 4)$. Найдите количество точек экстремума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-13; 2]$.



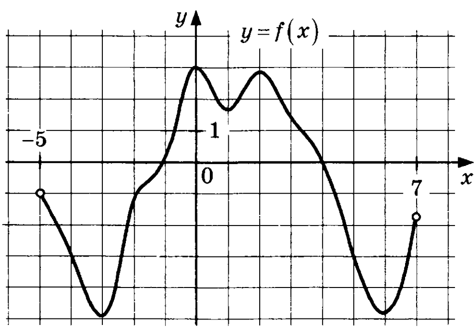
Задача 250. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-5; 8)$. Найдите промежутки убывания функции $f(x)$. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.



Задача 251. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Задача 252. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-5;\ 7)$. Найдите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 0.



Задача 253. Прямая $y = -2x - 9$ является касательной к графику функции $y = ax^2 - 10x - 8$. Найдите a.

СПРАВОЧНИК С ПРИМЕРАМИ И ЗАДАЧАМИ

В этой книжке мы старались писать о практической математике и ее бытовых применениях. При этом мы не доказывали теорем и не объясняли подробно тот или иной вывод. Везде, где требовались знания математических фактов, мы отсылали читателя сюда — в справочник.

Справочник нужен для того, чтобы кратко представить факты школьной математики, дать один-два примера и одно-два упражнения. Нет цели включить в справочник абсолютно все правила, формулы и теоремы. Мы руководствовались принципом полезности в решении задач. Если какой-то факт встречается в задачах, в частности заданий ЕГЭ, то мы старались про него не забыть. Зато здесь есть некоторые формулы, утверждения и даже методы решения задач, которых нет в учебниках.

Арифметика и алгебра

Натуральные числа

Четные натуральные числа делятся на 2. Их легко узнать по последней цифре. Она должна быть 0, 2, 4, 6 или 8. Например, 124 — число четное, а 237 — нечетное.

Задача 254. Какие из чисел 2153, 5326, 7464 и 3529 четные, а какие — нечетные?

Признак делимости на 3 и на 9. Если сумма цифр числа делится на 3, то само число также делится на 3. То же самое с делителем 9: если сумма цифр делится на 9, то и само число делится на 9.

Пример. Число 6753 делится на 3, поскольку сумма его цифр $6 + 7 + 5 + 3 = 21$ делится на 3. 21 не делится на 9, значит, число 6753 также не делится на 9.

Перед сложением можно вычеркнуть цифры 0, 3, 6 и 9, если они встречаются в числе. Тогда придется складывать меньше цифр. Если сумма получается большой, можно снова складывать цифры и т.д., пока не станет очевидно, делится ли сумма на 3 (или на 9) или нет.

Пример. Делится ли на 9 число 67042296345623432? Сначала вычеркнем «ненужные цифры» 0, 3, 6 и 9:

$$742245242.$$

Сложим оставшиеся цифры:

$$7+4+2+2+4+5+2+4+2=32.$$

На 9 не делится. Значит, и данное число не делится на 9.

Задача 255. Делится ли на 3 и на 9 число

$$274768242101589230 6?$$

Простые и составные числа. Любое натуральное число, большее единицы, — либо простое, либо составное. **Простое число** делится только на себя и на 1. Например, 2, 3, 7, 11 или 29. Все простые числа, кроме числа 2, — нечетные. **Составное число** является произведением нескольких простых. Например, $12=2\cdot2\cdot3$.

Пример. Число 653 простое. Чтобы убедиться в этом, придется проверить, делится ли оно на простые числа или нет. К счастью, проверять нужно только до простого числа, не превосходящего $\sqrt{653}$, то есть до числа 23.

На 2 и на 5 не делится (оканчивается цифрой 3). На 3 не делится (сумма цифр 14). Проверку делимости на 7, 11, 13, 17, 19 и 23 можно провести непосредственно делением с остатком. Убедившись, что все эти числа не являются делителями числа 653, делаем вывод: число 653 — простое.

Задача 256. Являются простыми или составными числа 457, 801, 5231, 5409, 473? Для составных чисел укажите разложение на простые.

НОД (наибольший общий делитель). Например, числа 24 и 60 имеют НОД 12, поскольку оба они делятся на 12 и нет общего делителя, большего, чем 12. Чтобы найти НОД двух чисел, можно разложить их на простые множители и выбрать общие простые:

$$24=2\cdot2\cdot2\cdot3,\ 60=2\cdot2\cdot3\cdot5.$$

Значит, НОД состоит из множителей 2, 2 и 3 : $2\cdot2\cdot3=12$.

Умение находить НОД полезно при сокращении дробей.

НОК (наименьшее общее кратное). Например, числа 24 и 60 имеют НОК 120, поскольку 120 делится и на 24, и на 60 и это наименьшее такое натуральное число. Чтобы найти НОК двух чисел, можно разложить их на простые множители и добавить к одному из чисел недостающие множители второго числа:

$$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3,\ 60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5.$$

В разложении числа 24 не хватает простого множителя 5, который есть у 60. Значит, НОК чисел 24 и 60 равен $24 \cdot 5 = 120$.

Умение находить НОК полезно при сложении и вычитании дробей.

Между НОД и НОК чисел a и b существует связь:

НОД $(a, b) \cdot$ НОК $(a, b) = ab$.

Задача 257. Найдите НОК и НОД чисел 252 и 84.

Дроби

Обыкновенная дробь — отношение двух целых чисел. Записывается $\frac{m}{n}$. Число m — **числитель.** Число n — **знаменатель.** Знаменатель считают положительным, то есть натуральным. Если числитель отрицателен, то знак минус обычно записывают перед дробью. Например, пишут $-\frac{3}{4}$, а не $\frac{-3}{4}$, хотя это одно и то же.

Связь между дробями и делением. Дробь следует понимать как результат деления числителя на знаменатель. Поэтому любое целое число можно представить в виде дроби многими способами. Например, 2 можно записать как $\frac{4}{2}$ или как $\frac{10}{5}$.

Сокращение дробей. Числитель и знаменатель дроби можно разделить (или умножить) на одно и то же ненулевое число. При этом значение не изменится. Самое большое натуральное число, на которое можно сократить дробь, — НОД числителя и знаменателя.

Например, у дроби $\frac{8}{24}$ и числитель, и знаменатель делятся на 4. Можно сократить эту дробь на 4: $\frac{8}{24} = \frac{2}{6}$.

Можно сократить еще на 2: $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

Задача 258. Сократите дроби $\frac{36}{162}$, $\frac{143}{1001}$, $\frac{372}{671}$.

Умножение дробей. Чтобы умножить одну дробь на другую, нужно умножить друг на друга их числители и — отдельно — знаменатели.

Например, $\frac{3}{7}\cdot\frac{5}{8}=\frac{15}{56}$.

Иногда в ходе умножения дроби удается сократить: $\frac{3}{7}\cdot\frac{14}{19}=\frac{3\cdot \cancel{14}^{2}}{\cancel{7}\cdot 19}=\frac{3}{1}\cdot\frac{2}{19}=\frac{6}{19}$.

Задача 259. Вычислите: $\frac{5}{21}\cdot\frac{7}{25}$; $\frac{32}{13}\cdot\frac{65}{72}\cdot\frac{1}{5}$.

Взаимно обратные дроби получаются друг из друга «переворачиванием». Например, дроби $\frac{3}{7}$ и $\frac{7}{3}$ взаимно обратны. Произведение взаимно обратных дробей равно 1:

$$\frac{3}{7}\cdot\frac{7}{3}=\frac{21}{21}=1.$$

Деление дробей. Чтобы разделить какое-то число на дробь, нужно это число умножить на дробь, обратную делителю. Вместо того чтобы делить, скажем, на $\frac{2}{7}$, нужно умножить на $\frac{7}{2}$.

Пример. $\frac{4}{87}:\frac{28}{39}=\frac{4}{87}\cdot\frac{39}{28}=\frac{4\cdot 39}{87\cdot 28}=\frac{\cancel{4}\cdot\cancel{39}^{13}}{\cancel{87}_{29}\cdot\cancel{28}^{7}}=\frac{13}{29\cdot 7}=\frac{13}{203}$.

Задача 260. Вычислите: $\frac{5}{12}:\frac{3}{16}$; $\frac{14}{9}:\frac{49}{12}$.

Сложение и вычитание дробей. Если у дробей знаменатели одинаковые, то при сложении складываются только числители. Если знаменатели разные, нужно добиться того, чтобы они стали одинаковыми. В качестве общего знаменателя часто используют НОК. Так же поступают при вычитании.

Примеры.

Случай одинаковых знаменателей:

$$\frac{5}{9}+\frac{4}{9}=\frac{5+4}{9}=\frac{9}{9}=1.$$

Случай разных знаменателей. Вычислим $\frac{2}{5}+\frac{1}{3}$. НОК знаменателей равен 15. С помощью дополнительных множителей получаем:

$$\frac{2}{5}+\frac{1}{3}=\frac{2\cdot 3}{5\cdot 3}+\frac{1\cdot 5}{3\cdot 5}=\frac{6}{15}+\frac{5}{15}=\frac{11}{15}.$$

Обычно пишут короче, объединяя два действия:

$$\frac{2}{5}+\frac{1}{3}=\frac{2\cdot 3+1\cdot 5}{15}=\frac{11}{15}.$$

Задача 261. Вычислите: $\frac{45}{76}-\frac{23}{76}+\frac{13}{76}$; $\frac{2}{7}+\frac{5}{3}$; $\frac{4}{21}-\frac{1}{14}$.

Неправильные и смешанные дроби. У неправильной дроби числитель больше или равен знаменателю. Если так, то можно выделить целую часть, получив **смешанную дробь.** Например, 17 при делении на 5 дает 3 и 2 в остатке. Поэтому $\frac{17}{5}=3+\frac{2}{5}$. Обычно записывают без знака «плюс»: $\frac{17}{5}=3\frac{2}{5}$.

Задача 262. а) Запишите неправильную дробь $\frac{67}{13}$ в виде смешанной;

б) запишите смешанную дробь $2\frac{7}{15}$ в виде неправильной.

Десятичная дробь (конечная) — дробь со знаменателем 10, 100, 1000 и т.д. Запись десятичных дробей особая — без дробной черты, но со специальным знаком (запятой), который отделяет целую часть от дробной. Например, запись 3,47 означает $3\frac{47}{100}$ или $\frac{347}{100}$.

Перевод обыкновенных дробей в десятичные. Обыкновенную дробь можно записать в виде десятичной дроби, только если знаменатель обыкновенной дроби (после сокращения) не содержит никаких простых множителей, кроме 2 и 5.

Например, $\frac{7}{50}$. $50=2\cdot5\cdot5$. Перевод возможен: $\frac{7}{50}=0{,}14$.

Другой пример: $\frac{5}{12}$. Знаменатель 12 содержит простой множитель 3. Перевод невозможен (хотя $\frac{5}{12}$ можно записать в виде **бесконечной десятичной дроби**).

Задача 263. Переведите, если возможно, обыкновенные дроби в десятичные: $\frac{3}{4}, \frac{7}{15}, \frac{67}{25}, \frac{31}{20}, \frac{13}{60}$.

Иррациональные числа

Дроби, в том числе десятичные, выражают частное или отношение двух целых. Отношение по-латыни *ratio*. Отсюда название для дробных чисел — **рациональные**. Числа, которые не удается записать с помощью дробей, называют иррациональными. Примеры: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π, $\sin 1^\circ$.

Докажем, что число $\sqrt{2}$ иррационально. Будем рассуждать от противного. Предположим, что $\sqrt{2}$ — рациональное число. Тогда $\sqrt{2}$ можно записать несократимой дробью: $\sqrt{2}=\frac{m}{n}$ (числа m и n целые и взаимно простые).

Следовательно, $n\sqrt{2}=m$. Возведем равенство в квадрат: $2n^2=m^2$. Левая часть делится на 2. Значит, правая тоже делится на два. Поэтому число m — четное: $m=2k$. Получаем: $2n^2=(2k)^2=4k^2$.

Разделим обе части равенства пополам: $n^2=2k^2$. Теперь правая часть делится на 2. Значит, левая тоже делится на 2, и поэтому число n — четное. Следовательно, у дроби $\frac{m}{n}$ числитель и знаменатель — четные числа. Дробь можно сократить на 2. Мы пришли к противоречию с предположением, что $\frac{m}{n}$ дробь несократимая. Утверждение доказано: число $\sqrt{2}$ не является рациональным.

Степени и корни

Степень — довольно капризная вещь. В зависимости от показателя основание может или не может быть отрицательным. Чтобы не вдаваться в подробности, мы сформулируем общие свойства степеней, предполагая, что все указанные степени имеют смысл. Так же поступим и с корнями.

Произведение и частное степеней с одинаковым основанием:

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}, \ \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}.$$

Степень в степени: $\left(a^x\right)^y = a^{xy}$.

Произведение и частное степеней с одинаковым показателем:

$$a^x b^x = (ab)^x, \ \frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x.$$

Нулевая степень: $a^0 = 1$. Иногда удобно полагать $0^0 = 1$ (и для этого есть основания), но обычно считается, что степень 0^0 не имеет смысла (и это тоже не без причин).

Обратное число. Число $\frac{1}{a}$ можно записать степенью: $a^{-1} = \frac{1}{a}$.

Отсюда получается, что $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$.

Примеры. Упростим следующие выражения, насколько возможно:

а) $8^n \cdot 8^2 = 8^{2+n}$;

б) $\frac{a^{12}}{a^9} = a^{12-9} = a^3$;

в) $\left(5^{\frac{1}{2}}\right)^6 = 5^{\frac{1}{2}\cdot 6} = 5^3 = 125$;

г) $\frac{2^{-4}}{0{,}5} = \frac{2^{-4}}{2^{-1}} = 2^{-4+1} = 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$.

Задача 264. Упростите следующие выражения, насколько возможно:

а) $(2a)^5 : a^3$;

б) $7^{4-x} \cdot 7^{x+2}$;

в) $8^{\frac{1}{3}} \cdot 2^3$;

г) $4^{-3} : 16^{-2} \cdot 0{,}25^2$.

Квадратный корень (арифметический). Свойства квадратного корня

$$\sqrt{a^2} = |a|,\ \sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab},\ \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Примеры. Упростим следующие выражения, насколько это возможно:

а) $\sqrt{18} \cdot \sqrt{50} = \sqrt{2 \cdot 9} \cdot \sqrt{2 \cdot 25} = 3\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2} = 15\sqrt{4} = 30$.

б) При $a < 5$ $\sqrt{(a-7)^2} = |a-7| = 7-a$, поскольку при $a < 5$ выражение $7-a$ положительно.

в) При $a > 13$ $\sqrt{(a-9)^2} = |a-9| = a-9$, поскольку если $a > 13$, то $a-9 > 0$.

г) $\dfrac{\sqrt{48}+\sqrt{3}}{\sqrt{75}} = \dfrac{\sqrt{16 \cdot 3}+\sqrt{3}}{\sqrt{25 \cdot 3}} = \dfrac{4\sqrt{3}+\sqrt{3}}{5\sqrt{3}} = \dfrac{5\sqrt{3}}{5\sqrt{3}} = 1$.

д) $\dfrac{\sqrt{84}}{\sqrt{189}} = \sqrt{\dfrac{84}{189}} = \sqrt{\dfrac{21 \cdot 4}{21 \cdot 9}} = \sqrt{\dfrac{4}{9}} = \dfrac{2}{3}$.

Задача 265. Упростите следующие выражения, насколько это возможно:

а) $\sqrt{12} \cdot \sqrt{48}$;

б) $\sqrt{(5-x)^2}$, если $x < 2$;

в) $\sqrt{(5-x)^2}$, если $x > 7$;

г) $\dfrac{\sqrt{63}}{\sqrt{112}}$.

Формулы сокращенного умножения

Квадрат суммы и разности:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,\ (a-b)^2=a^2-2ab+b^2.$$

Разность квадратов:

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b).$$

Пример. Упростить выражение $\dfrac{(a+2)^2-(a-2)^2}{4a}$.

Первый способ. Применим формулы квадрата суммы и квадрата разности:

$$\frac{(a+2)^2-(a-2)^2}{4a}=\frac{(a^2+4a+4)-(a^2-4a+4)}{4a}=\frac{8a}{4a}=2.$$

Второй способ. Применим формулу разности квадратов в числителе:

$$\frac{(a+2)^2-(a-2)^2}{4a}=\frac{(a+2-a+2)(a+2+a-2)}{4a}=\frac{4\cdot 2a}{4a}=2.$$

Пример. Упростим выражение: $(\sin x+\cos x)^2-1$.

Преобразуем:

$$(\sin x+\cos x)^2-1=\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x-1=$$

$$=(\sin^2 x+\cos^2 x)-1+\sin 2x=1-1+\sin 2x=\sin 2x.$$

Помимо формулы квадрата суммы при преобразовании мы воспользовались основным тригонометрическим тождеством и формулой синуса двойного аргумента.

Задача 266. Возведите в квадрат по формуле: $(x+4)^2$; $(2a-3)^2$.

Задача 267. Упростите выражение $\left(\dfrac{2b^2-2ab}{a^2-b^2}+1\right)\cdot(a+b)$.

Задача 268. Упростите выражение $(\cos x-\sin x)^2+\sin 2x$.

Логарифмы

Логарифм. Если $a^b=c$, то a называют основанием, а b — показателем степени или логарифмом. По сути, «логарифм» и «показатель степени» — синонимы. Важно подчеркнуть, какое основание и что получается в результате. Поэтому говорят «логарифм числа c по основанию a» и пишут $\log_a c=b$.

Нужно помнить, что основание a и аргумент c положительные числа. Кроме того, $a \neq 1$.

Примеры: а) $\log_2 8 = 3$, поскольку $2^3 = 8$,

б) $\log_3 \frac{1}{81} = -4$, поскольку $3^{-4} = \frac{1}{81}$.

Задача 269. Вычислите:

$$\log_2 16;\ \log_{\frac{1}{5}} 25;\ \log_{36} 6;\ \log_{0,5} 0{,}125.$$

Свойства логарифмов вытекают из свойств степеней. Наиболее употребительные свойства:

$$\log_a b + \log_a c = \log_a (bc);\ \log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c};$$

$$\log_a b^k = k \log_a b.$$

$\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ — переход к новому основанию c.

Если в логарифме $\log_a b$ перейти к основанию b, получится $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$.

Примеры.

а) $\log_6 2 + \log_6 3 = \log_6 6 = 1$;

б) $\log_{\sqrt{12}} 84 - \log_{\sqrt{12}} 7 = \log_{\sqrt{12}} \frac{84}{7} = \log_{\sqrt{12}} 12 = 2$.

в) Вычислить $\log_{b^5} a^6$, если $\log_a b = 7$. Преобразуем выражение: $\log_{b^5} a^6 = 6 \log_{b^5} a = 6 \cdot \frac{1}{5} \log_b a = \frac{6}{5} \cdot \frac{1}{\log_a b} = \frac{6}{5 \cdot 7} = \frac{6}{35}$.

Задача 270. Вычислите: $\log_{18} 3 + \log_{18} 6$; $\log_3 48 - 4\log_3 2$.

Задача 271. Найдите значение $\log_{125} x^4$, если $\log_5 x = 0{,}1$.

Натуральный логарифм. Логарифм по основанию $e \approx 2{,}72$ называют натуральным логарифмом. Обозначают его ln вместо log и основание не пишут.

Уравнения

Линейное уравнение или уравнение первой степени:

$$ax+b=0$$

имеет единственный корень $x=-\dfrac{b}{a}$.

Замечание. Разумеется, $a\neq 0$.

Примеры. а) Решим уравнение $4x-7=0$.

Получаем: $4x=7$; $x=\dfrac{7}{4}$.

б) Решим уравнение $2x+3(1-x)=x+4$.

Раскроем скобки и приведем подобные:

$2x+3-3x=x+4$; $2x-3x-x=4-3$; $-2x=1$; $x=-\dfrac{1}{2}$.

Задача 272. Решите уравнения:

а) $3-8x=0$;

б) $2(3x-1)-3(2x+5)=4x-7$;

в) $(x-1)^2-(x+3)^2=5$.

Квадратное уравнение или уравнение второй степени: $ax^2+bx+c=0$.

Коэффициенты — любые числа, но только $a\neq 0$.

Уравнение имеет два корня.

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ и } x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Если дискриминант b^2-4ac положителен, то корни x_1 и x_2 различны.

Если дискриминант равен нулю, то корни совпадают, хотя их по-прежнему два (так думают математики — странные люди).

Если дискриминант отрицателен, то корни не являются действительными числами (обычно говорят, что корней в этом случае нет).

Пример. Решим уравнение $x^2-6x+5=0$. Дискриминант равен $6^2-4\cdot 5=16$.

Следовательно, корни равны $\dfrac{6-4}{2}=1$ и $\dfrac{6+4}{2}=5$.

Ответ: 1; 5.

Задача 273. Решите уравнения:

а) $x^2+7x-18=0$;

б) $3x^2-x-14=0$;

в) $(x+2)^2+(x-3)^2=17$.

Сумма корней: $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$; произведение корней: $x_1x_2=\dfrac{c}{a}$. Эти два равенства называют **теоремой Виета**. Верна также обратная теорема: если числа x_1 и x_2 удовлетворяют равенствам $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$ и $x_1x_2=\dfrac{c}{a}$, то эти числа являются корнями квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$. Теорему Виета удобно использовать для проверки при решении уравнений.

Пример. Решим уравнение: $2x^2-7x+6=0$.

Найдем корни: $x=\dfrac{7\pm\sqrt{49-48}}{4}$, то есть $x_1=\dfrac{3}{2}$, $x_2=2$. По теореме Виета сумма корней $\dfrac{7}{2}$, а произведение $\dfrac{6}{2}=3$.

Сложим и умножим друг на друга найденные корни:

$$x_1+x_2=\frac{3}{2}+2=\frac{7}{2};\ x_1x_2=\frac{3}{2}\cdot 2=3.$$

Уравнение решено верно.

Неравенства

Линейное неравенство.

Пример. $3x+7>0$; $3x>-7$; $x>-\dfrac{7}{3}$.

$$-4x>2x+5;\ -6x>5;\ x>-\frac{5}{6}.$$

Заметьте, что последнее действие — деление на коэффициент при x. Если он отрицателен, то знак неравенства меняется.

Задача 274. Решите неравенство:

а) $5x-7>3$;

б) $4(x+2)<5x-1$.

Квадратное неравенство. Решим неравенство $x^2 \geq 4$. Вот распространенная ошибка: школьник действует «по аналогии» с уравнением: $x \geq \pm 2$. Это ерунда.

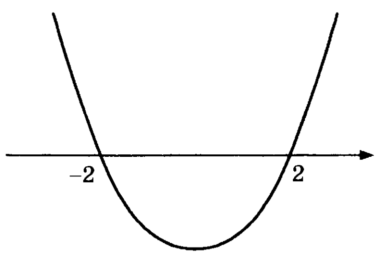
Мы уже отмечали, что $x = \pm 2$ на самом деле не равенство, а сокращенная запись двух равенств $x = -2$ и $x = 2$. Что же тогда значит $x \geq \pm 2$? Ничего не значит. Бессмыслица.

Решением квадратного неравенства являются промежутки, границами которых служат корни соответствующего уравнения. Правильное решение выглядит иначе.

Решение. Запишем неравенство $x^2 \geq 4$ в виде $x^2 - 4 \geq 0$. Корни уравнения $x^2 - 4 = 0$ равны -2 и 2.

Неравенство $x^2 \geq 4$ выполняется при $x \leq -2$ и при $x \geq 2$, а при $-2 < x < 2$ неравенство не выполняется. Значит, ответом служат промежутки $(-\infty; -2]$ и $[2; +\infty)$.

Смысл легко понять, если сделать набросок графика функции $y = x^2 - 4$. При этом не обязательно указывать ось ординат, ноль, соблюдать масштаб и т.п. Повторяем: рисунок очень схематичен, но достаточен для того, чтобы увидеть, где располагаются решения.



Так же решаются все прочие квадратные неравенства.

1. Нужно привести неравенство к удобному виду (начинается с x^2, а в правой части 0). Помним, что если приходится умножать обе части на отрицательное число, неравенство меняет знак.
2. Решаем соответствующее уравнение.
3. С помощью схемы графика находим промежутки решения.

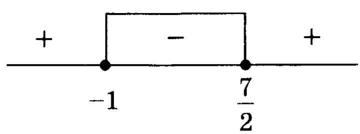
Метод интервалов. Этот метод является обобщением описанного выше способа решения квадратного неравенства. Он позволяет решать самые разные неравенства, часто даже независимо от того, как они устроены. Приведя неравенство к удобному виду (справа 0), нужно решить одно или два соответствующих уравнения, а затем сделать схематичный набросок поведения функции в левой части. При этом это даже не набросок графика — это просто схема, позволяющая видеть, выше или ниже нуля проходит этот график.

Пример 1. Решим неравенство $\dfrac{2x^2-5x-7}{\sqrt{2}-3}>0$.

Сначала упростим неравенство, избавившись от знаменателя. Для этого домножим обе части неравенства на $\sqrt{2}-3$. При этом неравенство поменяет знак на противоположный, поскольку $\sqrt{2}-3<0$:

$$2x^2-5x-7<0;\ (x+1)(2x-7)<0.$$

Корни уравнения $(x+1)(2x-7)=0$ равны -1 и $\dfrac{7}{2}$. Неравенство выполняется при $-1<x<\dfrac{7}{2}$ и не выполняется при $x>\dfrac{7}{2}$ (оба множителя больше нуля) и $x<-1$ (оба множителя меньше нуля). Это видно на схеме

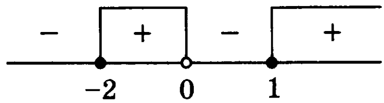


Пример 2. Решим неравенство $x+1-\dfrac{2}{x}\ge 0$.

Преобразуем неравенство, приведя левую часть к общему знаменателю: $\dfrac{x^2+x-2}{x}\ge 0$.

Корни уравнения $x^2+x-2=0$ равны -2 и 1. Знаменатель равен 0 при $x=0$. Воспользуемся методом интервалов, чтобы определить, на каких интервалах выражение будет больше нуля.

Знаки на каждом интервале найдем подсчетом. Решение видно на схеме.



Точки −2, 1, 0 проверяем отдельно. Точки −2 и 1 также являются решениями, а точка 0 — нет.

Ответ: $-2 \le x < 0$ и $x \ge 1$.

Задача 275. Решите неравенства:

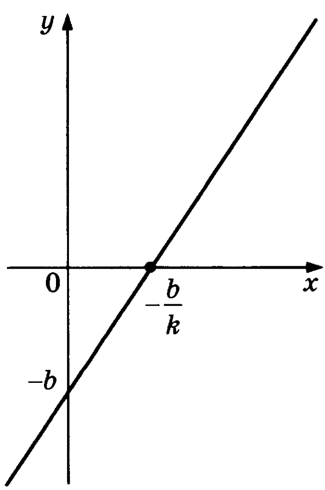
а) $\dfrac{x^2-5x+6}{2-\sqrt{39}} < 0$; б) $\dfrac{3x^2+2x-5}{x+2} \le 0$.

Функции и графики

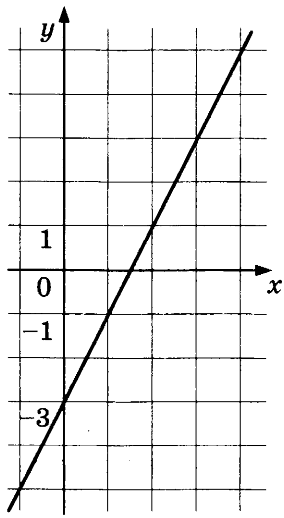
Линейная функция

Формула $y = kx + b$.

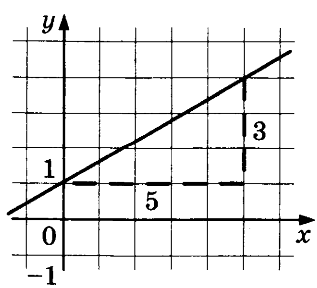
График — прямая линия (не вертикальная). Тангенс наклона графика к оси абсцисс равен угловому коэффициенту k. Ось ординат график пересекает в точке (0; b).



Пример 1. График функции $y = 2x - 3$. График проходит через точку (0; −3) на оси ординат и имеет угловой коэффициент 2.



Пример 2. График функции $y = \frac{3}{5}x + 1$. График проходит через точку (0; 1) на оси ординат и имеет угловой коэффициент $\frac{3}{5}$. Строить его удобно следующим образом: от точки (0; 1) построим вспомогательный треугольник с катетами 5 и 3 (нужно учесть, что угловой коэффициент положителен, поэтому функция возрастает).



Получается точка (5; 4). Теперь проведем прямую через две найденные точки.

Задача 276. Постройте графики функций:

а) $y = 3x - 5$; в) $y = \frac{1}{2}x + 3$;

б) $y = 4 - 3x$; г) $y = -\frac{2}{3}x - 2$.

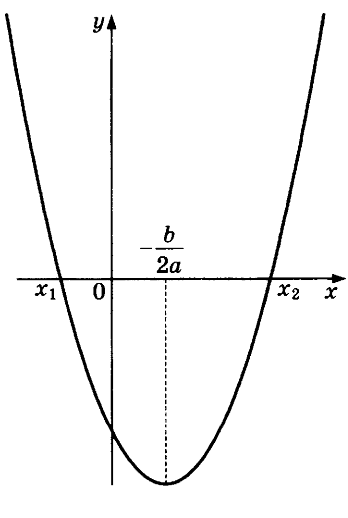
Квадратичная функция

Формула $y = ax^2 + bx + c$.

График — парабола. Ветви параболы направлены вверх или вниз в зависимости от знака старшего коэффициента a. Вершина параболы имеет координаты $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{D}{4a}\right)$, где $D = b^2 - 4ac$ — дискриминант.

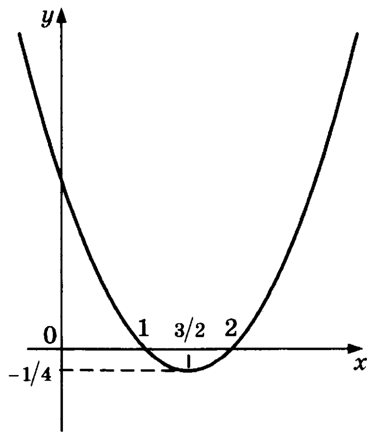
Ось ординат график пересекает в точке $(0;\ c)$.

Если квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет действительные корни x_1 и x_2, то парабола $y = ax^2 + bx + c$ пересекает ось абсцисс в точках $(x_1;\ 0)$ и $(x_2;\ 0)$.

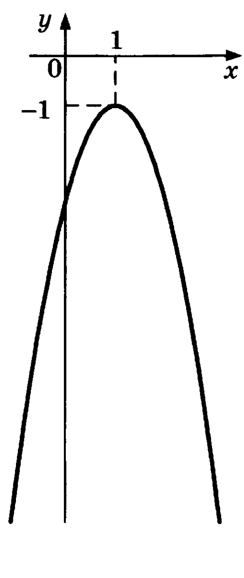


Пример 1. График функции $y = x^2 - 3x + 2$. Уравнение $x^2 - 3x + 2 = 0$ имеет два корня: 1 и 2. Коэффициент при x^2

больше нуля, значит, ветви направлены вверх. Вершина параболы имеет координаты $\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{4}\right)$.



Пример 2. График функции $y = -2x^2 + 4x - 3$.
Уравнение $-2x^2 + 4x - 3 = 0$ не имеет действительных корней ($D = 4^2 - 4\cdot(-2)\cdot(-3) = 16 - 24 = -8$), значит, график не пересекает ось абсцисс, ветви параболы направлены вниз. Вершина параболы находится в точке $(1; -1)$.



Задача 277. Постройте графики функций:

а) $y = x^2 - 7x + 18$; б) $y = x^2 + 6x - 8$;

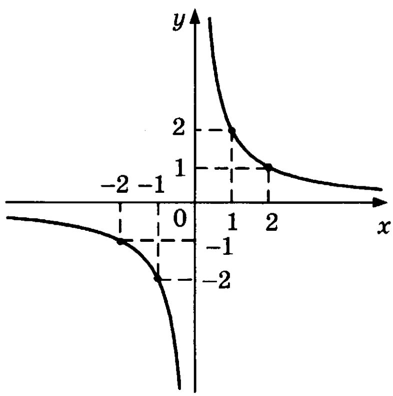
в) $y = -\frac{1}{2}x^2 - 3x + 8$.

Функция $y = \frac{k}{x}$

Эту функцию называют «обратная пропорциональность» потому, что во сколько раз увеличивается x, во столько же раз уменьшается y и наоборот.

График — гипербола. На графике есть характерные точки $(1; k)$, $(k; 1)$, $(-1; -k)$ и $(-k; -1)$, с помощью которых график легко построить. Удаляясь от начала оси координат, график приближается к осям, но не пересекает их.

Пример. График функции $y = \frac{2}{x}$. График удобно построить по точкам (1; 2), (2; 1), (−1; −2) и (−2; −1).

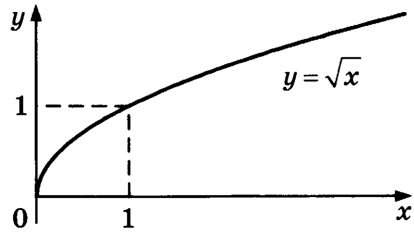


Задача 278. Постройте графики функций:

а) $y = \frac{3}{x} - 1$; б) $y = -\frac{2}{x} + 3$; в) $y = \frac{3}{2x} - 2$.

Функция $y = \sqrt{x}$

Графиком служит половина параболы, ось которой совпадает с осью абсцисс.

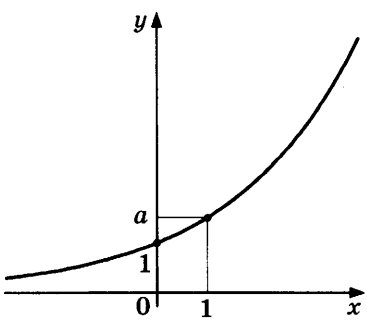


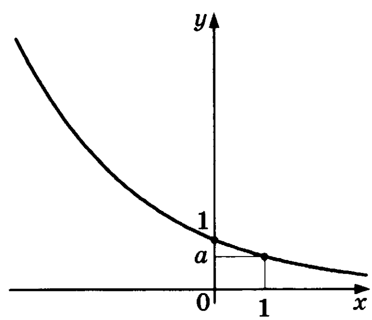
Задача 279. Постройте графики функций:

а) $y = -\sqrt{x}$; б) $y = 2\sqrt{x}$; в) $y = \sqrt{x} + 1$.

Показательная функция $y = a^x$

График пересекает ось ординат в точке (0; 1). Вторая характерная точка (1; a). Функция возрастает, если $a > 1$. Функция убывает, если $0 < a < 1$.



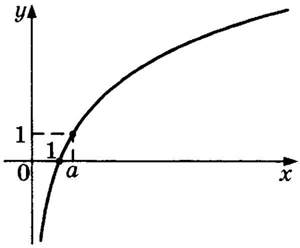


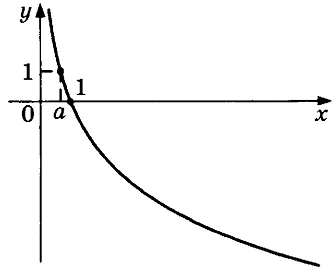
Задача 280. Постройте графики функций:

а) $y = 2^x$; б) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$; в) $y = -\left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Логарифмическая функция $y = \log_a x$

График пересекает ось абсцисс в точке (1; 0). Вторая характерная точка (a; 1). Функция возрастает, если $a > 1$. Функция убывает, если $0 < a < 1$.





Задача 281. Постройте графики функций:

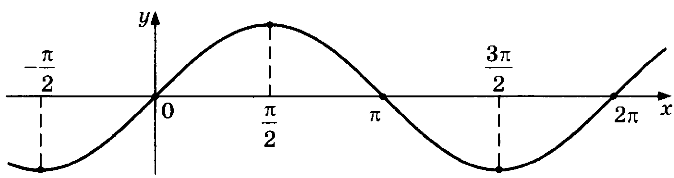
а) $y = \log_3 x$;

б) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$;

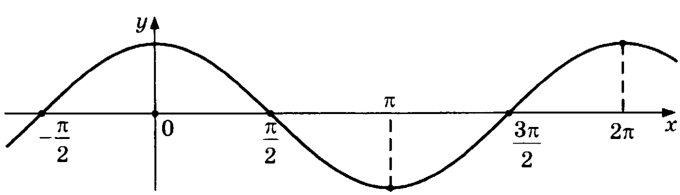
в) $y = -\log_2 x$.

Тригонометрические функции

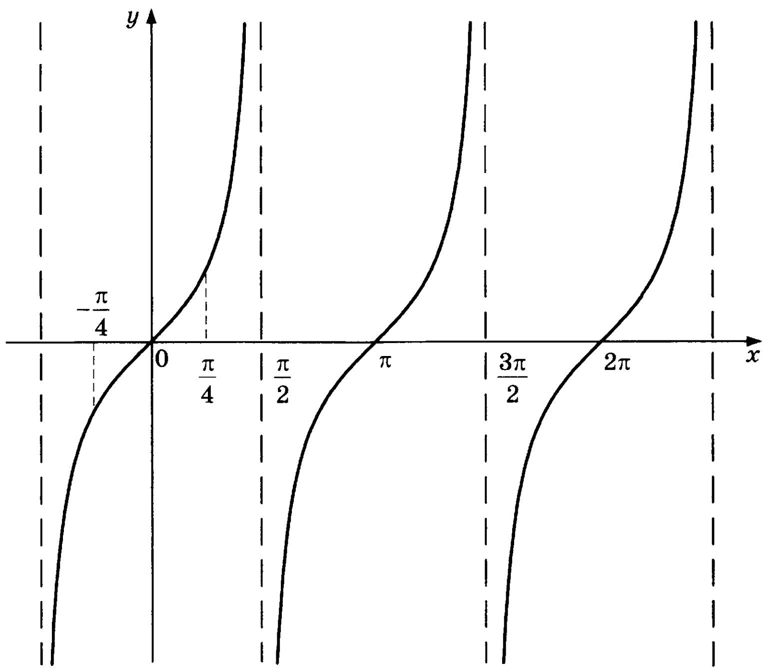
Синус. График — волнообразная линия (синусоида). На рисунке показаны характерные точки. Наименьший период 2π. Наибольшее значение 1, наименьшее значение -1. Пересекает ось абсцисс под углом 45°.



Косинус. График — тоже синусоида, но сдвинутая относительно графика синуса на $\frac{\pi}{2}$ влево. На рисунке показаны характерные точки. Наименьший период 2π. Наибольшее значение 1, наименьшее значение -1.



Тангенс. График состоит из одинаковых кусков, каждый из которых пересекает ось абсцисс под углом 45°. Характерные точки показаны на рисунке.



Задача 282. Постройте графики функций:

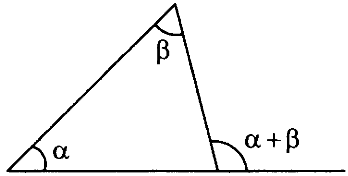
а) $y = -\cos x$; б) $y = \sin x + 1$; в) $y = \operatorname{tg} x - 1$.

Геометрия

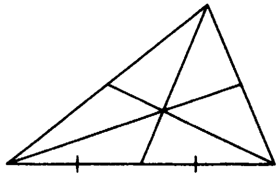
Общие свойства треугольников

Сумма углов треугольника равна 180°.

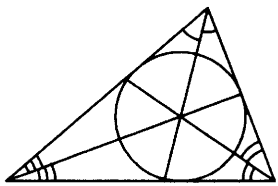
Внешний угол равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним. При решении задач иногда важен более простой факт: внешний угол больше, чем любой внутренний угол, не смежный с ним.



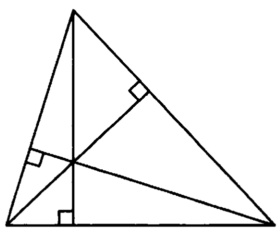
Медианы пересекаются в одной точке (центр треугольника).



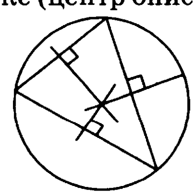
Биссектрисы пересекаются в одной точке (центр вписанной окружности).



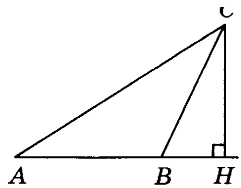
Высоты или их продолжения пересекаются в одной точке (ортоцентр).



Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке (центр описанной окружности).



Пример. В треугольнике ABC угол A равен 6°, CH — высота, угол BCH равен 75°. Найдите угол ACB. Ответ дайте в градусах.

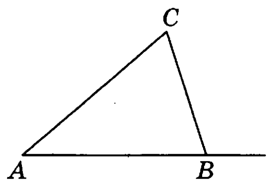


Решение. $\angle ACB = \angle ACH - \angle BCH$.

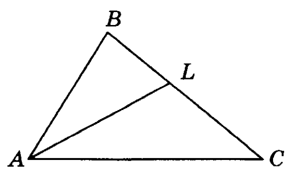
Угол ACH равен $180° - \angle A - \angle AHC = 180° - 6° - 90° = 84°$. Откуда $\angle ACB = 84° - 75° = 9°$.

Ответ: 9.

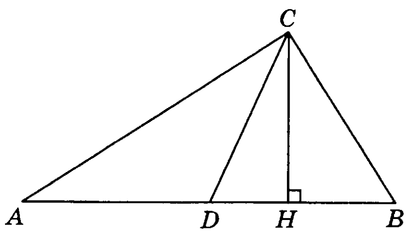
Задача 283. В треугольнике ABC угол A равен 20°, внешний угол при вершине B равен 61°. Найдите угол C. Ответ дайте в градусах.



Задача 284. В треугольнике ABC проведена биссектриса AL, угол ALC равен 121°, угол ABC равен 101°. Найдите угол ACB. Ответ дайте в градусах.



Задача 285. В прямоугольном треугольнике угол между высотой и биссектрисой, проведенными из вершины прямого угла, равен 13°. Найдите меньший угол данного треугольника. Ответ дайте в градусах.



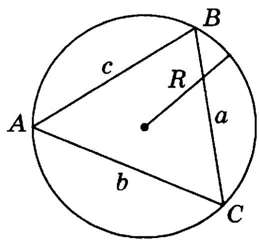
Вписанная и описанная окружности. В любой треугольник можно вписать окружность. Центр окружности лежит в точке пересечения биссектрис.

Около любого треугольника можно описать окружность. Центр лежит в точке пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.

Теорема синусов. В любом треугольнике отношения сторон к синусам противолежащих углов одинаковы:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R\ .$$

Кроме того, эти отношения равны удвоенному радиусу описанной окружности.

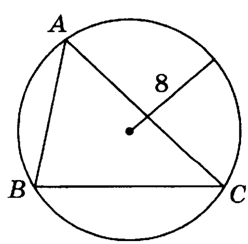


Теорема косинусов. Для любого треугольника справедливо равенство

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C,$$

где a, b и c — стороны, а угол C — противолежащий стороне c.

Это равенство позволяет найти сторону, зная две другие стороны и угол между ними. Или можно найти угол, зная три стороны.



Пример. В треугольнике ABC угол C равен 45°, сторона $AB=4\sqrt{2}$. Найдите радиус описанной окружности.

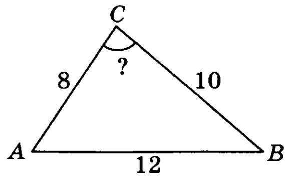
Решение. По теореме синусов $2R = \frac{AB}{\sin C} = \frac{4\sqrt{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 8;$

откуда $R = 4$.

Ответ: 4.

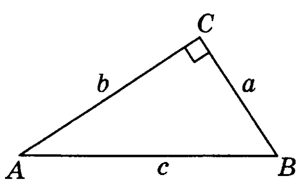
Задача 286. Радиус описанной окружности треугольника ABC равен 8, угол ABC равен 60°. Найдите длину стороны AC.

Задача 287. Стороны треугольника ABC равны 8, 10 и 12. Найдите косинус угла, противолежащего стороне длины 12.

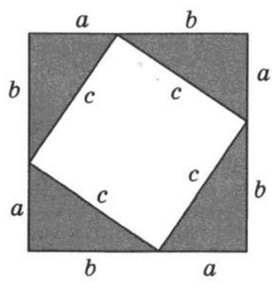


Прямоугольные треугольники

Теорема Пифагора. В прямоугольном треугольнике теорема косинусов принимает более простой вид: $c^2 = a^2 + b^2$ — квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.



Докажем теорему Пифагора. Возьмем прямоугольный треугольник с катетами a и b и гипотенузой c. Возьмем еще три таких же треугольника и приложим их друг к другу так, как показано на рисунке.



Получился большой квадрат со стороной $a + b$, а внутри — малый квадрат со стороной c.

С одной стороны, площадь большого квадрата равна $(a + b)^2$, а с другой стороны, она равна сумме площадей четырех прямоугольных треугольников и площади малого квадрата: $4 \cdot \frac{1}{2}ab + c^2$, то есть $2ab + c^2$.

Приравняем эти два выражения для одной и той же площади:

$$(a + b)^2 = 2ab + c^2.$$

Раскроем скобки и приведем подобные:

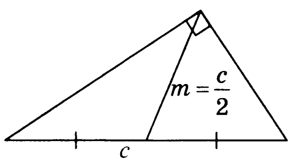
$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2;\ a^2 + b^2 = c^2,$$

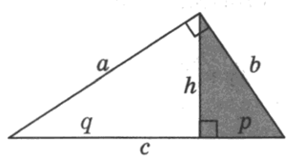
что и требовалось доказать.

Похожее доказательство получается, если сложить четыре треугольника иначе. Попробуйте.

Свойство медианы. Медиана, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы.

Свойство высоты. Высота, проведенная к гипотенузе, делит прямоугольный треугольник на два треугольника, которые подобны между собой и подобны большому треугольнику.

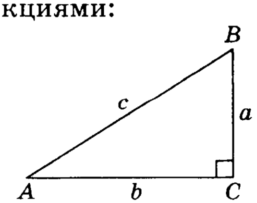




Обозначим высоту h, а отрезки гипотенузы p и q. Из подобия треугольников следуют полезные равенства:

$$h = \sqrt{pq}\ ,\ h = \frac{ab}{c}\ ,\ b = \sqrt{cp}\ ,\ a = \sqrt{cq}\ .$$

Соотношения между сторонами и углами. В любом прямоугольном треугольнике катеты и гипотенуза связаны тригонометрическими функциями:



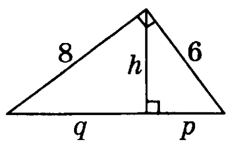
$$\sin A = \frac{a}{c},\ \ \cos A = \frac{b}{c},\ \ \operatorname{tg} A = \frac{a}{b}\ .$$

Пример. Из вершины прямого угла треугольника проведена высота. Катеты треугольника равны 6 и 8. Найдите длины отрезков, на которые высота делит гипотенузу, и длину высоты.

Решение. По теореме Пифагора найдем гипотенузу:

$$c=\sqrt{6^2+8^2}=\sqrt{36+64}=10.$$

Отсюда найдем высоту $h=\frac{ab}{c}=\frac{6\cdot 8}{10}=4{,}8$.



Преобразуем формулу $b=\sqrt{cp}$, чтобы найти из нее p: $\sqrt{p}=\frac{b}{\sqrt{c}}$; $p=\frac{b^2}{c}$. $p=\frac{6^2}{10}=3{,}6$. Аналогично, $q=\frac{8^2}{10}=6{,}4$.

Ответ: $p=3{,}6$; $q=6{,}4$; $h=4{,}8$.

Задача 288. Один из катетов прямоугольного треугольника равен 6, а синус прилежащего к нему острого угла равен $\frac{5}{13}$. Найдите длину:

а) второго катета;

б) гипотенузы;

в) высоты, проведенной из вершины прямого угла;

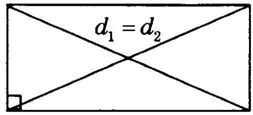
г) медианы, проведенной из вершины прямого угла;

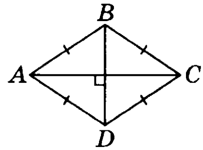
д) длины отрезков, на которые высота делит гипотенузу.

Четырехугольники

Параллелограммы — общее название группы четырехугольников, у которых противоположные стороны попарно параллельны. Если углы у параллелограмма прямые, получается прямоугольник. Если все стороны равны, получается ромб.

Квадрат — одновременно и прямоугольник, и ромб.

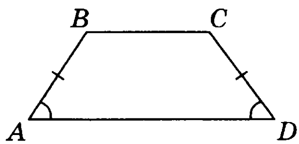




У прямоугольника диагонали равны между собой.

У ромба диагонали перпендикулярны друг другу.

Трапеция — четырехугольник, у которого параллельны только две противоположные стороны. Они называются **основаниями**. Две непараллельные стороны называются **боковыми** сторонами трапеции. Если боковые стороны равны, трапеция называется **равнобедренной** или **равнобокой**.



Подобные фигуры

Если две фигуры имеют одинаковую форму (расстояния между соответствующими точками пропорциональны, соответствующие углы равны), то говорят, что такие фигуры **подобны**. Совсем просто: подобные фигуры одинаковы по форме, но могут отличаться размером.

Подобными бывают не только треугольники. Все квадраты подобны друг другу. Все круги подобны друг другу.

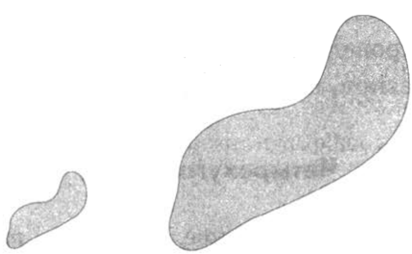


Рис. Подобные фигуры

Подобны могут быть фигуры не только на плоскости, но и в пространстве. Например, все шары подобны друг другу.

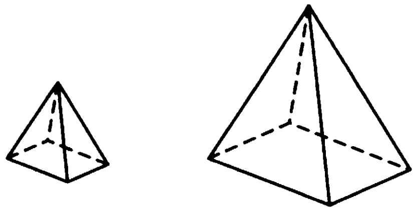


Рис. Подобные пирамиды

Коэффициент подобия — множитель, показывающий, во сколько раз подобные фигуры отличаются по размеру. Если взять в каждой из двух фигур по отрезку, соединяющему соответствующие точки, то коэффициент подобия равен отношению длин этих отрезков. При этом редко указывают, в каком порядке делят длины. Поэтому, если фигуры подобны с коэффициентом 2, можно сказать, что они подобны и с коэффициентом 0,5.

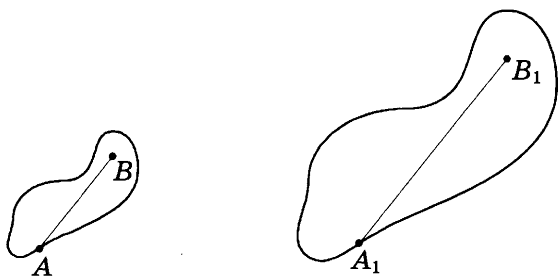
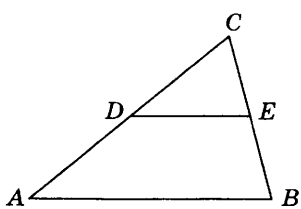


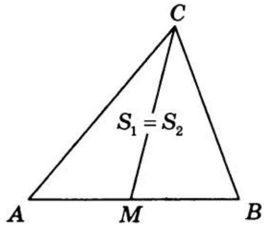
Рис. $A_1B_1 = 2AB$; *2 — коэффициент подобия*

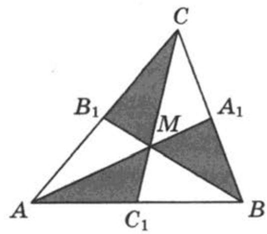
Задача 289. В треугольнике ABC проведена средняя линия DE (см. рис.). Покажите, что треугольники CDE и ABC подобны, и найдите коэффициент подобия.



Площади

Свойство медиан треугольника. Медиана разбивает треугольник на два треугольника одинаковой площади. Все три медианы разбивают треугольник на шесть треугольников одинаковой площади.





Отношение площадей подобных фигур. Отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия. Например, если одна из фигур в 2 раза больше другой (по длине), то по площади она больше в 4 раза.

Формулы площадей треугольников

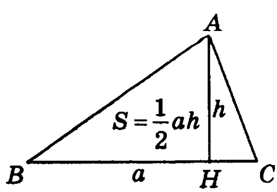
$$S = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}ab\sin C.$$

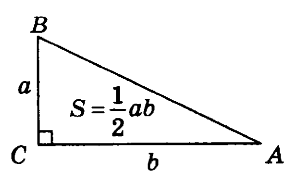
Для прямоугольных треугольников эти формулы приобретают более простой вид: $S = \frac{1}{2}ab$.

Формула Герона:

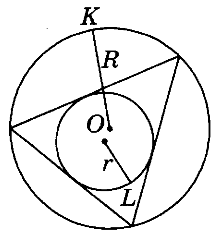
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где $p = \frac{a+b+c}{2}$ — половина периметра треугольника (полупериметр).





Связь между площадью треугольника и радиусами вписанной и описанной окружностей: $S = rp$ и $S = \frac{abc}{4R}$.



Пример 1. Найдите площадь треугольника, две стороны которого равны $3\sqrt{3}$ и 12, а угол между ними равен 60°.

Решение. Воспользуемся формулой площади треугольника по двум сторонам и углу между ними:

$$S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{3} \cdot 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 27.$$

Ответ: 27.

Пример 2. В треугольнике со сторонами 3 и 6 проведены высоты к этим сторонам. Высота, проведенная к первой из этих сторон, равна 4. Чему равна высота, проведенная ко второй стороне?

Решение. Обозначим вторую высоту x. Вычислим площадь треугольника двумя способами:

$$S = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot x,$$

откуда получим уравнение для x: $x = \frac{3 \cdot 4}{6} = 2$.

Ответ: 2.

Задача 290. Медианы треугольника ABC пересекаются в точке M. BK — медиана. Площадь треугольника ABC равна 24. Найдите площадь треугольника AMK.

Задача 291. Угол при вершине, противолежащей основанию равнобедренного треугольника, равен 30°. Боковая сторона треугольника равна 30. Найдите площадь этого треугольника.

Задача 292. Найдите площадь прямоугольного треугольника, если его катет и гипотенуза равны соответственно 10 и 26.

Задача 293. Периметр треугольника равен 36, а радиус вписанной окружности равен 5. Найдите площадь этого треугольника.

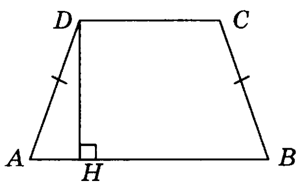
Задача 294. Стороны треугольника равны 4, 13 и 15. Найдите его площадь.

Задача 295. Площадь треугольника равна 36, а его стороны равны 9, 10 и 17. Найдите радиус описанной окружности.

Площадь параллелограмма: $S = ah = ab\sin C$. Неважно, какой из углов считать углом C в этой формуле: синусы всех углов у параллелограмма равны.

Площадь трапеции: $S = \frac{a+b}{2}h$.

Пример. Основания равнобедренной трапеции равны 14 и 26, а ее периметр равен 60. Найдите площадь трапеции.



Решение. Сначала найдем длину боковой стороны:

$$AD + BC + 14 + 26 = 60,$$

откуда $AD + BC = 2 \cdot AD = 60 - 14 - 26 = 20$; $AD = BC = 10$. Опустим высоту DH на основание AB, тогда

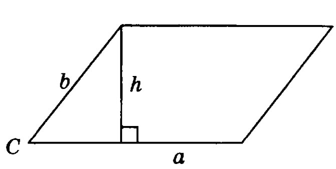
$$AH = \frac{AB - CD}{2} = 6.$$

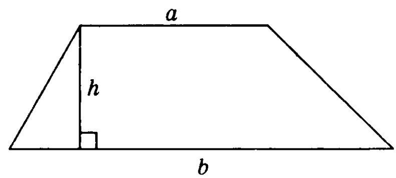
Теперь по теореме Пифагора найдем длину высоты DH: $DH = \sqrt{AD^2 - AH^2} = \sqrt{100 - 36} = 8.$

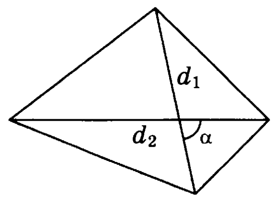
Площадь трапеции равна $S = \frac{14+26}{2} \cdot 8 = 160.$

Ответ: 160.

Площадь произвольного четырехугольника:





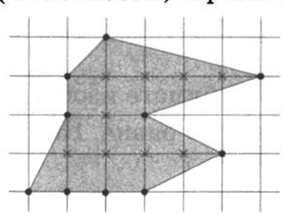


$S=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\alpha$, где α — угол между диагоналями. Если диагонали перпендикулярны (например, в ромбе), формула принимает более простой вид: $S=\frac{1}{2}d_1d_2$.

Формула Пика. Если на клетчатой бумаге изображен многоугольник так, что все его вершины находятся в узлах сетки, то площадь многоугольника равна

$$I+\frac{1}{2}E-1,$$

где I — число узлов сетки внутри многоугольника, а E — число узлов на границе (в частности, вершины).



$I = 9$, $E = 10$

$S = 9 + 5 - 1 = 13$

Площадь круга:

$$S=\pi R^2.$$

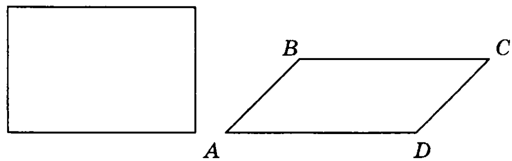
Число π с точностью до сотых полагают 3,14.

Задача 296. Найдите площадь ромба, если его диагонали равны 13 и 6.

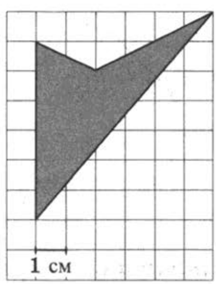
Задача 297. Найдите площадь квадрата, если его диагональ равна 11.

Задача 298. Стороны параллелограмма равны 6 и 12. Высота, опущенная на первую из этих сторон, равна 9. Найдите высоту, опущенную на вторую сторону параллелограмма.

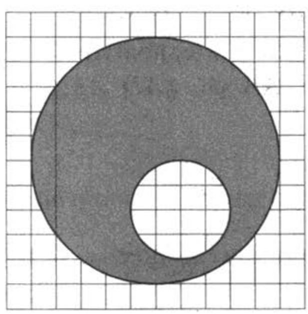
Задача 299. Параллелограмм и прямоугольник имеют одинаковые стороны. Найдите острый угол параллелограмма, если его площадь равна половине площади прямоугольника. Ответ дайте в градусах.



Задача 300. Пользуясь формулой Пика, найдите площадь четырехугольника, изображенного на рисунке.

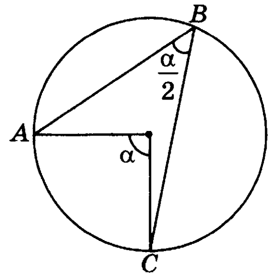


Задача 301. На клетчатой бумаге изображены два круга. Площадь внутреннего круга равна 16. Найдите площадь заштрихованной фигуры.

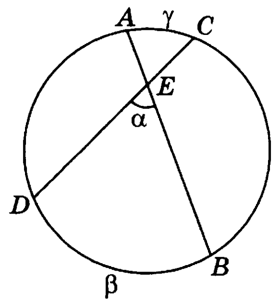


Окружность, хорды, секущие

Вписанный угол равен половине центрального угла, опирающегося на ту же хорду (или дугу).



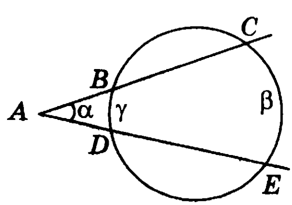
Произведение отрезков хорд. Точка пересечения E двух хорд AB и CD окружности разбивает их на четыре отрезка, причем $AE \cdot EB = CE \cdot ED$.



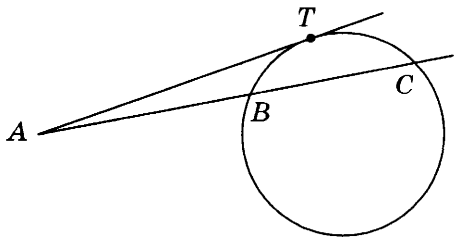
Угол между пересекающимися хордами равен полусумме угловых мер дуг, заключенных между хордами:

$$\alpha = \frac{\beta + \gamma}{2}.$$

Теоремы о секущих. Если из точки A проведены две секущие к окружности, то произведения этих секущих на их внешние части равны: $AB \cdot AC = AD \cdot AE$.



Близкий по смыслу факт: если из точки A проведены секущая и касательная к окружности, то произведение секущей на ее внешнюю часть равно квадрату касательной: $AB \cdot AC = AT^2$.

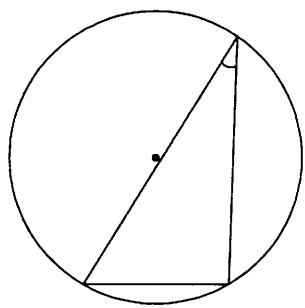


Угол между секущими равен полуразности угловых мер дуг, заключенных между секущими:

$$\alpha = \frac{|\beta - \gamma|}{2}.$$

Длина окружности радиусом r равна $2\pi r$.

Пример. Найдите величину острого вписанного угла, опирающегося на хорду, равную радиусу окружности. Ответ дайте в градусах.

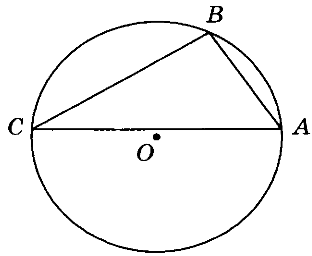


Решение. Так как длина хорды равна радиусу окружности, то центральный угол будет углом равностороннего треугольника и, значит, равен 60°. Вписанный угол в два раза меньше центрального — 30°.

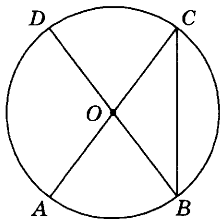
Ответ: 30.

Задача 302. Найдите вписанный угол, опирающийся на дугу, длина которой равна $\frac{1}{5}$ длины окружности. Ответ дайте в градусах.

Задача 303. Точки A, B, C, расположенные на окружности, делят ее на три дуги, градусные меры которых относятся как 1:3:5. Найдите больший угол треугольника ABC. Ответ дайте в градусах.



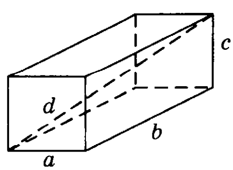
Задача 304. Отрезки AC и BD — диаметры окружности с центром O. Угол ACB равен 51°. Найдите угол AOD. Ответ дайте в градусах.



Многогранники

Теорема Пифагора для прямоугольного параллелепипеда. Сумма квадратов трех ребер прямоугольного параллелепипеда, выходящих из одной вершины, равна квадрату диагонали:

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2 .$$

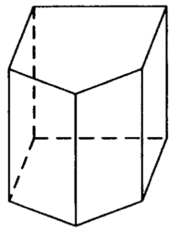


Эйлерова характеристика. В любом многограннике число ребер E на 2 меньше, чем общее число вершин V и граней F:

$$V + F - E = 2.$$

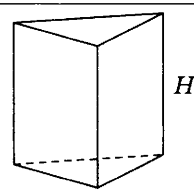
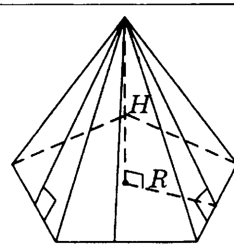
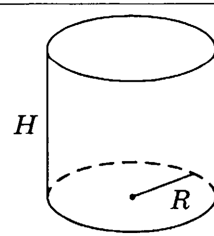
Пример. Проверим для пятиугольной призмы. Вершин 10, граней 7, ребер 15.

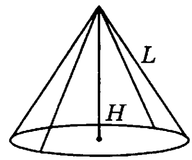
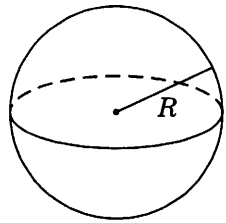
$$10 + 7 - 15 = 2.$$



Площади поверхностей и объемы некоторых многогранников и тел вращения

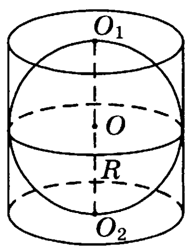
Пояснения к таблице: P — периметр основания, S — площадь основания, R — радиус, H — высота.

Тело	Площадь поверхности	Объем	Рисунок
Прямая призма	PH (боковая) $PH + 2S$ (с основаниями)	SH	
Правильная пирамида с высотой боковой грани L	$\frac{1}{2}PL$ (боковая) $\frac{1}{2}PL + S$ (с основанием)	$\frac{1}{3}SH$	
Цилиндр	$2\pi RH$ (боковая) $2\pi RH + 2\pi R^2$ (с основаниями)	$\pi R^2 H$	

Конус с образующей L	πRL (боковая) $\pi RL + \pi R^2$. (с основанием)	$\frac{1}{3}\pi R^2 H$	
Шар	$4\pi R^2$	$\frac{4}{3}\pi R^3$	

Объем описанного около сферы многогранника: $V = \frac{1}{3}Sr$,
где S — площадь поверхности многогранника, а r — радиус вписанной сферы.

Пример. Цилиндр, объем которого равен 120, описан около шара. Найдите объем шара.



Решение. Поскольку шар вписан в цилиндр, высота цилиндра равна диаметру шара. Значит, объем цилиндра равен

$$V_{цил} = \pi R^2 \cdot 2R = 2\pi R^3 = 120,$$

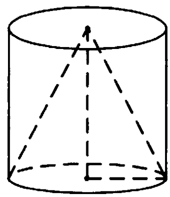
откуда $\pi R^3 = 60$.

Объем шара равен $V_{шар} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3} \cdot 60 = 80$.

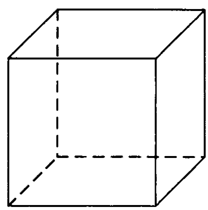
Ответ: 80.

Задача 305. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 12 и 3. Диагональ параллелепипеда равна 13. Найдите объем параллелепипеда.

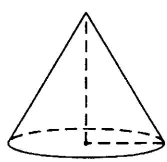
Задача 306. Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Объем цилиндра равен 120. Найдите объем конуса.



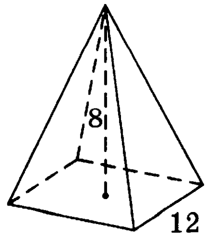
Задача 307. Ребра прямоугольного параллелепипеда равны 1, 5 и 9. Найдите площадь его поверхности.



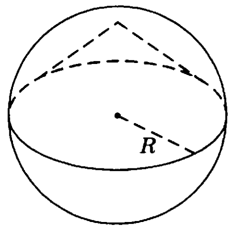
Задача 308. Длина окружности основания конуса равна 3, образующая равна 4. Найдите площадь боковой поверхности конуса.



Задача 309. Найдите площадь поверхности правильной четырехугольной пирамиды, стороны основания которой равны 12 и высота равна 8.



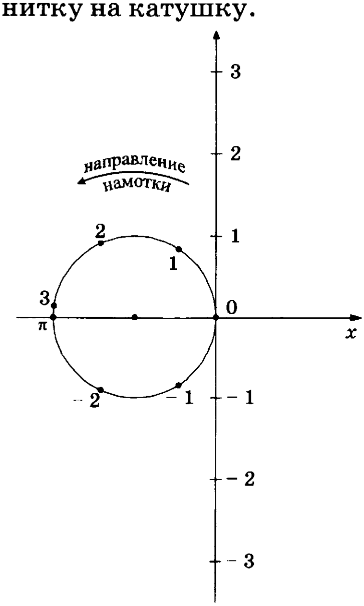
Задача 310. Конус вписан в шар. Радиус основания конуса равен радиусу шара. Объем конуса равен 10. Найдите объем шара.



Тригонометрия

Тригонометрическая окружность. Синус, косинус и тангенс

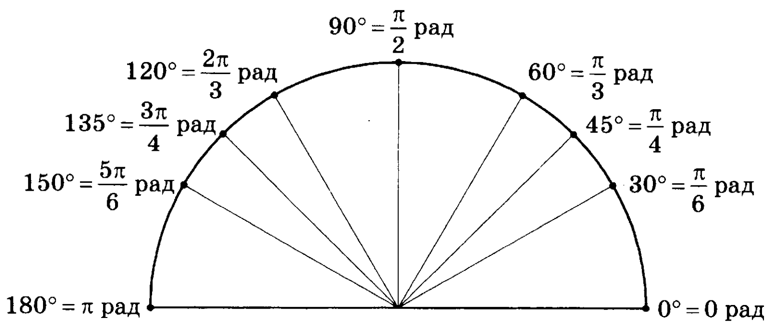
Тригонометрическая окружность (единичная, числовая) — это окружность, центр которой находится в начале координат, а радиус равен 1. На тригонометрической окружности откладываются числа так же, как на числовой прямой. Начальную точку выбирают на пересечении с положительным лучом оси абсцисс. А затем откладывают числа, двигаясь против часовой стрелки. Получается, что числовую прямую «намотали» на окружность, как нитку на катушку.



Число 1 попадает в точку, которая соответствует дуге примерно в 57°. В точку, диаметрально противоположную началу отсчета, попадает число π. Таким образом, π — длина половины окружности единичного радиуса. π — число иррациональное.

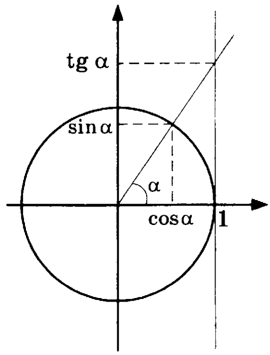
Можно сопоставить углы и числа на окружности. Числа отсчитывают от выбранного начала, а углы — от направления оси абсцисс. Числу 0° соответствует 0, углу 180° соответствует π. Отсюда получаются значения для всех прочих углов. Формула: $a = \frac{\alpha\pi}{180}$, где $\alpha°$ — интересующий нас угол, а a — соответствующее ему число.

Важные значения на промежутке от 0° до 180°, которые полезно помнить для решения задач, мы покажем на рисунке.



Радианная мера угла. Сопоставление чисел на тригонометрической окружности и углов в градусах неудобно. Намного удобнее отождествить числа и соответствующие им углы. Получается другая единица измерения углов. Она называется «радиан». Точка 1 на числовой окружности соответствует углу 1 радиан. Иногда добавление про радианы опускают. Просто пишут угол 1. Точка $\frac{\pi}{2}$ соответствует углу $\frac{\pi}{2}$.

Косинус и синус числа. Если на окружности взять произвольную точку (угол) α, то в прямоугольной системе координат эта точка имеет координаты: абсциссу и ординату. Они называются соответственно **косинусом** и **синусом** числа α.



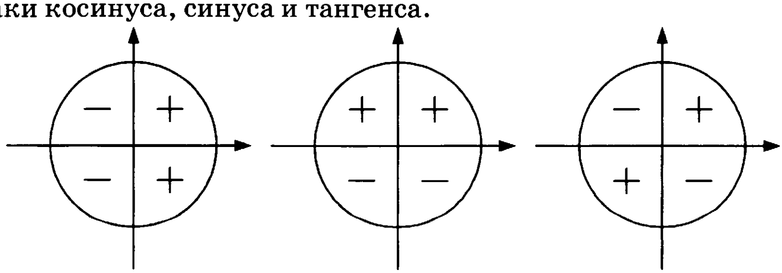
Тангенс числа α — отношение синуса α к косинусу α:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

Геометрически тангенс можно интерпретировать как точку на вертикальной прямой, касающейся тригонометрической окружности справа. Такая прямая называется **осью тангенсов.**

Знаки тригонометрических функций

Знаки косинуса и синуса. Поскольку косинус является абсциссой точки числовой окружности, он положителен в правой полуплоскости и отрицателен в левой. Синус – ордината этой точки. Поэтому синус положителен в верхней полуплоскости и отрицателен в нижней. На рисунке показаны знаки косинуса, синуса и тангенса.



знаки косинуса *знаки синуса* *знаки тангенса*

Задача 311. Определите знаки тригонометрических функций:

а) $\sin 155°$; б) $\cos\frac{7\pi}{6}$; в) $\operatorname{tg} 320°$.

Основное тригонометрическое тождество

Из теоремы Пифагора получается равенство, которое выполняется при всех α:

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1\ .$$

Это равенство называется **основным тригонометрическим тождеством.** Из него следуют еще две формулы связи между разными функциями:

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \ \text{ и } \ \frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha + 1} = \sin^2\alpha\ .$$

Пользуясь этими формулами, можно находить одну тригонометрическую функцию, зная другую.

Пример 1. Найдите $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = -\dfrac{12}{13}$ и $180° < \alpha < 270°$.

Выразим косинус через синус, пользуясь основным тригонометрическим тождеством:

$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \dfrac{144}{169} = \dfrac{25}{169} = \left(\dfrac{5}{13}\right)^2$. В третьей четверти косинус меньше нуля, значит, $\cos\alpha = -\dfrac{5}{13}$.

Пример 2. Найдите $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha = 0{,}6$ и $90° < \alpha < 180°$.

Решение. Известно, что $\dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha + 1} = \sin^2\alpha = 0{,}36$, откуда

$$\operatorname{tg}^2\alpha = 0{,}36\operatorname{tg}^2\alpha + 0{,}36\ ;$$

$$0{,}64\operatorname{tg}^2\alpha = 0{,}36\ ;$$

$$\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{0{,}36}{0{,}64} = \left(\frac{0{,}6}{0{,}8}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2.$$

Поскольку α находится во второй четверти, тангенс отрицательный, значит, $\operatorname{tg}\alpha = -0{,}75$.

Задачу можно решить и другим способом — пользуясь основным тригонометрическим тождеством и определением тангенса:

$\cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha = 1-0{,}36 = 0{,}64$, косинус меньше нуля ($\alpha$ во второй четверти), значит, $\cos\alpha = -0{,}64$, откуда $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{0{,}6}{0{,}8} = -0{,}75$.

Пример 3. Найдите $\cos\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = -0{,}4$ и $270° < \alpha < 360°$.

Решение. Преобразуем формулу так, чтобы из нее было удобно вычислять косинус:

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1}{1+0{,}16} = \frac{1}{1{,}16} = \frac{25}{29}.$$

В 4-й четверти косинус больше нуля, значит, $\cos\alpha = \sqrt{\frac{25}{29}} = \frac{5}{\sqrt{29}}$.

Задачи

Задача 312. Найдите $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{13}}{13}$ и $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Задача 313. Найдите $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{7}{25}$ и $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

Задача 314. Найдите $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{19}}{10}$ и $\alpha \in (\pi; 1{,}5\pi)$.

Формулы приведения для синуса и косинуса

По графикам синуса и косинуса (см. стр. 192) видно, что одна функция выражается через другую «сдвигом». Кроме того, графики обладают симметрией. Например, график синуса симметричен относительно начала координат, а график косинуса — относительно оси ординат.

Отсюда следует ряд формул. Помимо этого, обе функции периодичны с наименьшим периодом 2π, то есть при увеличении (уменьшении) аргумента α значения синуса и косинуса повторяются через каждый оборот окружности, то есть через каждые 2π.

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ **(четность косинуса).**

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ **(нечетность синуса).**

$\sin(\alpha \pm 2\pi) = \sin\alpha$ **(периодичность синуса).**

$\cos(\alpha \pm 2\pi) = \cos\alpha$ **(периодичность косинуса).**

$\sin(\alpha \pm \pi) = -\sin\alpha$, $\cos(\alpha \pm \pi) = -\cos\alpha$,

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$.

Из этих формул можно получить множество других.

Пример 1. Найдите $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$, если $\cos\alpha = 0{,}45$.

Решение. Представим $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$ как

$$\sin\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \pi\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos\alpha = -0{,}45 .$$

Ответ: $-0{,}45$.

Пример 2. Найдите $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$, если $\cos\alpha = \frac{12}{13}$ и $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$.

Решение. Преобразуем выражение:

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha .$$

$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \frac{144}{169} = \frac{25}{169} = \left(\frac{5}{13}\right)^2$, в 4-й четверти синус меньше нуля, значит, $\sin\alpha = -\frac{5}{13}$.

Ответ: $-\frac{5}{13}$.

Задача 315. Найдите $\cos\left(\alpha - \frac{5\pi}{2}\right)$, если $\sin\alpha = 0{,}23$.

Задача 316. Найдите $\sin\left(\frac{7\pi}{2} + \alpha\right)$, если $\sin\alpha = \frac{8}{17}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Задача 317. Найдите $\cos\left(\frac{5\pi}{2} + \alpha\right)$, если $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Задача 318. Найдите значение выражения $\frac{6\cos 19^\circ}{\sin 71^\circ}$.

Формулы приведения для тангенса. Используя формулы приведения для синуса и косинуса, их периодичность и свойство четности, можно получить формулы приведения для тангенса. Оказывается, что наименьший период тангенса π. Это видно и на графике функции тангенса (см. стр. 193).

$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$ **(нечетность тангенса).**

$\operatorname{tg}(\alpha \pm \pi) = \operatorname{tg}\alpha$ **(периодичность тангенса).**

$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha$ (эта функция называется **котангенсом**).

Пример. Найдите $\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{2} + \alpha\right)$, если $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}4$.

Решение. Преобразуем выражение:

$$\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{5\pi}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(\alpha + 3\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} =$$

$$= -\frac{1}{0{,}4} = -2{,}5.$$

Ответ: $-2{,}5$.

Задача 319. Найдите $\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$, если $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}5$.

Задача 320. Найдите $\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)$, если $\operatorname{tg}\alpha = 10$.

Формулы сложения и формулы двойного аргумента

Формулы косинуса, синуса и тангенса суммы и разности часто бывают полезны при решении задач.

Косинус суммы: $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$.

Косинус разности: $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$.

Синус суммы: $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$.

Синус разности: $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$.

Тангенс суммы: $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$.

Тангенс разности: $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$.

Подставив $\alpha=\beta$, можно получить формулы двойного угла:

косинус двойного угла: $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$;

синус двойного угла: $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$;

тангенс двойного угла: $\operatorname{tg} 2\alpha=\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$.

Пример 1. Найдите $\operatorname{tg}105°$.

Решение. Представим тангенс в виде тангенса суммы углов, тригонометрические функции которых нам известны:

$$\operatorname{tg}105°=\operatorname{tg}(45°+60°)=\frac{\operatorname{tg}45°+\operatorname{tg}60°}{1-\operatorname{tg}45°\cdot\operatorname{tg}60°}=\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}=\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)^2}{1-3}=$$

$$=\frac{1+3+2\sqrt{3}}{-2}=-2-\sqrt{3}.$$

Ответ: $-2-\sqrt{3}$.

Пример 2. Найдите $\cos(\alpha+\beta)$, если $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$, $\cos\beta=\dfrac{12}{13}$, $90°<\alpha<180°$, $0°<\beta<90°$.

Решение. Для того чтобы найти косинус суммы, придется сначала вычислить $\cos\alpha$ и $\sin\beta$.

$\cos^2\alpha=1-\dfrac{9}{25}=\dfrac{16}{25}$, во второй четверти косинус меньше нуля, значит, $\cos\alpha=-\dfrac{4}{5}$.

$\sin^2\beta=1-\dfrac{144}{169}=\dfrac{25}{169}$, в первой четверти синус больше нуля, значит, $\sin\beta=\dfrac{5}{13}$.

Теперь вычислим косинус суммы:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=-\frac{4}{5}\cdot\frac{12}{13}-\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{13}=-\frac{63}{65}.$$

Задача 321. Найдите $\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$.

Задача 322. Найдите $\sin 15°$.

Задача 323. Найдите $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$, если $\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$, $\cos\beta=-\dfrac{8}{17}$, $90°<\alpha<180°$, $180°<\beta<270°$.

Элементы математического анализа

Таблица производных элементарных функций

Функция $f(x)$	Производная $f'(x)$	Функция $f(x)$	Производная $f'(x)$
$f(x)=c$ (постоянная)	$f'(x)=0$	$f(x)=e^x$	$f'(x)=e^x$
$f(x)=x^n$	$f'(x)=nx^{n-1}$	$f(x)=\cos x$	$f'(x)=-\sin x$
$f(x)=\ln x$	$f'(x)=\frac{1}{x}$ при $x>0$	$f(x)=\sin x$	$f'(x)=\cos x$
$f(x)=\log_a x$	$f'(x)=\frac{1}{x\ln a}$ при $x>0$	$f(x)=\mathrm{tg}\, x$	$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$

Правила дифференцирования

Производная суммы и разности. Производную суммы функций можно вычислять отдельно по слагаемым:

$$(f+g)'=f'+g' \ .$$

Аналогичная формула верна для суммы произвольного числа слагаемых, а также для разности.

Числовой множитель можно выносить за знак производной: $(af)'=af'$.

Производная произведения.

$$(f\cdot g)'=f'\cdot g+f\cdot g'.$$

Производная частного.

$$\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'\cdot g-f\cdot g'}{g^2}.$$

Разумеется, формула применима во всех точках, кроме тех, где $g(x)=0$.

Производная сложной функции (композиции функций). Если нужно взять производную функции, скомбинированной из двух функций, то сначала дифференцируется внешняя функция, а потом — внутренняя:

$$f(g(x))' = f'(g) \cdot g'(x).$$

Пример 1. Найдите производную функции $y = (x-8)e^{x-9}$.

Решение. Воспользуемся формулой производной произведения функций:

$$y' = (x-8)' \cdot e^{x-9} + (x-8) \cdot \left(e^{x-9}\right)' = e^{x-9} + (x-8) \cdot \left(e^{x-9}\right)'.$$

Теперь воспользуемся формулой производной сложной функции:

$$e^{x-9} + (x-8) \cdot \left(e^{x-9}\right)' = e^{x-9} + (x-8) \cdot e^{x-9} \cdot (x-9)' = e^{x-9} + (x-8) \cdot e^{x-9} =$$

$$= (x-7) \cdot e^{x-9}$$

Ответ: $(x-7) \cdot e^{x-9}$.

Пример 2. Найдите производную функции $y = \dfrac{2x^2+5}{\sin x}$.

Решение. Воспользуемся формулой производной частного:

$$y' = \frac{\sin x \cdot \left(2x^2+5\right)' - \sin' x \cdot \left(2x^2+5\right)}{\sin^2 x} = \frac{4x \sin x - \left(2x^2+5\right) \cdot \cos x}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{4x - \left(2x^2+5\right) \cdot \operatorname{ctg} x}{\sin x}.$$

Ответ: $\dfrac{4x - \left(2x^2+5\right) \cdot \operatorname{ctg} x}{\sin x}$.

Задача 324. Найдите производную функции

$$y = 3x^5 - 7x^3 + 2x^2 - 5x + 9.$$

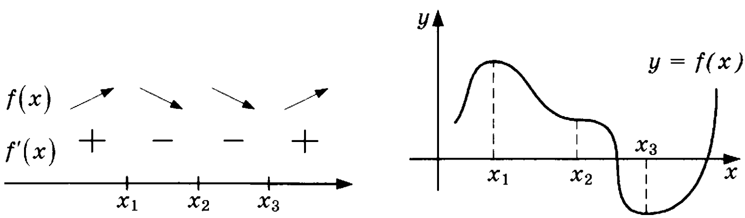
Задача 325. Найдите производную функции $y = \left(x^2 + 3x + 1\right) \ln x$.

Задача 326. Найдите производную функции $y = \dfrac{e^{2x}}{x-1}$.

Поиск точек экстремума

Требуется найти **точку максимума (минимума)** дифференцируемой функции $f(x)$ на каком-то промежутке или на всей числовой прямой.

1. Следует вычислить производную функции $f'(x)$.
2. Нужно решить уравнение $f'(x)=0$, чтобы найти точки, в которых касательная к графику горизонтальна.
3. На промежутках между найденными точками нужно определить знаки производной. Если в точке производная меняет знак с плюса на минус, то это точка максимума. Если знак меняется с минуса на плюс, то эта точка – точка минимума. Если и справа, и слева от точки знак один и тот же, то такая точка не является точкой экстремума — ни точкой максимума, ни точкой минимума.



x_1, x_2, x_3 — нули производной.

Схема показана на рисунке. Слева — знаки производной и стрелками схематично показано, возрастает или убывает функция. Справа — пример графика функции, ведущей себя указанным способом.

Пример. Найдите точки максимума и минимума функции

$$y=x^3-3x^2-9x+15.$$

Решение. Найдем производную:

$$y'=3x^2-6x-9=3\left(x^2-2x-3\right).$$

Производная равна нулю в точках $x=3$ и $x=-1$. Производная меньше нуля на интервале $(-1;\,3)$ и больше нуля вне этого отрезка. В точке -1 она меняет знак с плюса на минус, значит, это точка максимума. В точке 3 производная меняет знак с минуса на плюс, значит, это точка минимума.

Ответ: $x=-1$ — точка максимума, $x=3$ — точка минимума.

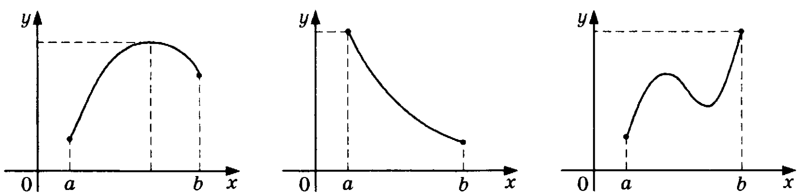
Задача. Найдите точки минимума и максимума функций:

а) $y=-2x^2+6x-24$; б) $y=x^3-9x^2+15x-12$.

Поиск наибольшего или наименьшего значений функции на отрезке

Задача 327. Требуется найти наибольшее (наименьшее) значение дифференцируемой функции $f(x)$ на каком-то отрезке.

1. Следует вычислить производную функции $f'(x)$.
2. Нужно решить уравнение $f'(x)=0$, чтобы найти точки, в которых касательная к графику горизонтальна.
3. Нужно вычислить и сравнить значения функции $f(x)$ в найденных точках и в концах отрезка. Наибольшее из чисел — наибольшее значение функции, наименьшее число — наименьшее значение функции на изучаемом отрезке. Наибольшее значение может быть в точке максимум слева или справа.



На рисунке показаны три возможных случая расположения наибольшего значения непрерывной на отрезке функции.

Пример. Найдите наименьшее значение функции.
$y=(x-17)e^{x-16}$ на отрезке [15; 17].
Решение. Найдем производную функции:

$$y'=e^{x-16}+(x-17)e^{x-16}=(x-16)e^{x-16}.$$

Производная обращается в ноль в единственной точке $x=16$. Теперь сравним значения в концах отрезка и в найденной точке:

$x=15$: $y=(-2)e^{-1}=-\frac{2}{e}\approx-0{,}74$;

$x=16$: $y=(-1)e^{0}=-1$;

$x=17$: $y=0\cdot e=0$.

Ответ: -1.

Задача 328. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 7\sqrt{2}\cos x + 7x - \frac{7\pi}{4} + 9 \text{ на отрезке } \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

Задача 329. Найдите наименьшее значение функции

$$y = 3x - \ln(x+2)^3$$

на отрезке $[-1,5; 0]$.

Первообразная и площадь криволинейной трапеции

Функция, для которой $f(x)$ является производной, называется первообразной для функции $f(x)$. Часто первообразную обозначают той же буквой, что и саму функцию, но делают ее заглавной. Например, $F(x)$ — привычное обозначение первообразной для функции $f(x)$.

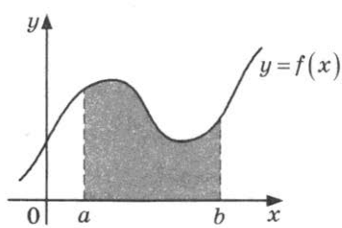
$$F'(x) = f(x).$$

Если у функции есть первообразная, то у нее бесконечно много первообразных, все они отличаются друг от друга на какое-то число. Например, если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, то и $F(x)+1$ и $F(x)-10$ — тоже первообразные для $f(x)$.

Криволинейная трапеция. Так называют фигуру, которая ограничена графиком некоторой функции и осью абсцисс на некотором отрезке (см. рис. *а*).

Формула Ньютона-Лейбница связывает площадь криволинейной трапеции и первообразную. Если криволинейная трапеция образована графиком функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, то площадь этой трапеции равна $F(b)-F(a)$, где $F(x)$ — какая-то из первообразных для функции $f(x)$:

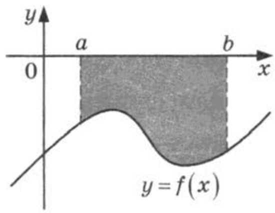
$$S = F(b) - F(a).$$



а)

Нужно учесть, что площадь при этом вычисляется «с учетом знака» функции $f(x)$. То есть если $f(x) \geq 0$ на всем отрезке, то выражение $F(b) - F(a)$ будет действительно равняться площади (рис. *а*). Если $f(x) \leq 0$, то $F(b) - F(a)$ даст значение площади со знаком минус (рис. *б*).

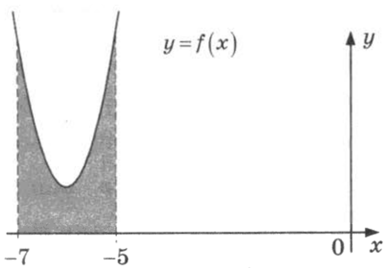
$$F(b) - F(a) = -S$$



б)

Поэтому при вычислении площадей с помощью формулы Ньютона-Лейбница нужно представлять себе расположение трапеции и пользоваться формулой внимательно.

Пример. На рисунке изображен график некоторой функции $y = f'(x)$, для которой функция $F(x) = x^3 + 18x^2 + 109x - 2$ — одна из первообразных. Найдите площадь закрашенной фигуры.

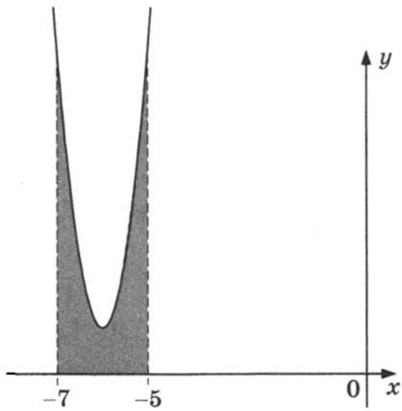


Решение. Искомая площадь равна

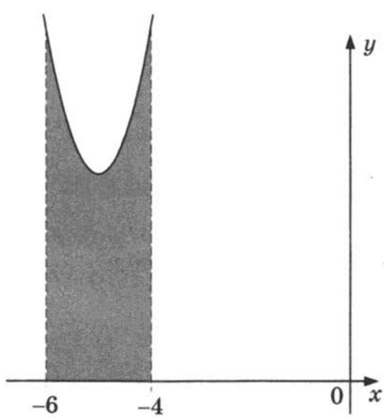
$$F(-5) - F(-7) = (-5)^3 + 18 \cdot (-5)^2 +$$
$$+ 109 \cdot (-5) - 2 - \left((-7)^3 + 18 \cdot (-7)^2 + 109 \cdot (-7) - 2\right) =$$
$$= -5^3 + 18 \cdot 5^2 - 109 \cdot 5 - 2 + 7^3 - 18 \cdot 7^2 + 109 \cdot 7 + 2 =$$
$$= -125 + 343 - 18 \cdot (49 - 25) + 109 \cdot (7 - 5) =$$
$$= -125 + 343 - 432 + 218 = 4.$$

Ответ: 4.

Задача 330. На рисунке изображен график некоторой функции $y = f'(x)$, для которой функция $F(x) = 2x^3 + 36x^2 + 217x - \frac{11}{4}$ — одна из первообразных. Найдите площадь закрашенной фигуры.



Задача 331. На рисунке изображен график некоторой функции $y = f'(x)$, для которой функция $F(x) = x^3 + 15x^2 + 80x - \frac{1}{2}$ — одна из первообразных. Найдите площадь закрашенной фигуры.



ПОДГОТОВИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

Алгебра

332. Найдите значение выражения $(1{,}7+2{,}8)\cdot 24$.

333. Найдите значение выражения $\dfrac{9{,}4}{2{,}1+2{,}6}$.

334. Найдите значение выражения $\left(\dfrac{11}{9}+\dfrac{4}{9}\right):\dfrac{5}{36}$.

335. Найдите значение выражения $4{,}5\cdot 7{,}2-0{,}5$.

336. Найдите значение выражения $\dfrac{1}{\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{12}}$.

337. Найдите значение выражения $\left(\dfrac{9}{14}-\dfrac{10}{21}\right)\cdot 42$.

338. Найдите значение выражения $\dfrac{7^{-4}}{\left(7^3\right)^{-2}}$.

339. Найдите значение выражения $\dfrac{3^5\cdot 4^6}{12^5}$.

340. Найдите значение выражения $\dfrac{8^3}{2^4}:2^2$.

341. Найдите значение выражения $7\cdot 10^3+2\cdot 10^2+3\cdot 10^1$.

342. Найдите значение выражения $4\cdot 10^3+7\cdot 10^2+8\cdot 10^1$.

343. Найдите значение выражения $\dfrac{\left(9^{-3}\right)^2}{9^{-8}}$.

344. Найдите значение выражения $\sqrt{24}\cdot\sqrt{6}$.

345. Найдите $\cos\alpha$, если $\sin\alpha=\dfrac{3\sqrt{11}}{10}$ и $0^\circ<\alpha<90^\circ$.

346. Найдите значение выражения $\sqrt{2^2\cdot 3^4}$.

347. Найдите значение выражения $\log_4(\log_2 16)$.

348. Найдите значение выражения $\left(\sqrt{20}-\sqrt{5}\right)\sqrt{5}$.

349. Найдите значение выражения $\left(\sqrt{13}-1\right)\left(\sqrt{13}+1\right)$.

350. Решите уравнение $x^2+6=5x$.

351. Решите уравнение $x^2-7x-18=0$.

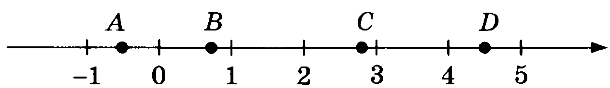
352. Найдите корень уравнения $(x-8)^2=(x-2)^2$.

353. Найдите корень уравнения $\log_3(2x+4)-\log_3 2=\log_3 5$.

354. Найдите корень уравнения $5^{x-6}=25$.

355. Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-9}=\frac{1}{9}$.

356. На координатной прямой отмечены точки A, B, C и D.



Каждой точке соответствует одно из чисел в правом столбце. Установите соответствие между указанными точками и числами.

ТОЧКИ

A

B

C

D

ЧИСЛА

1) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-2}$

2) $\log_4 0{,}5$

3) $\frac{50}{11}$

4) $\sqrt{0{,}68}$

Впишите в приведенную в ответе таблицу под каждой буквой соответствующий числу номер.

Ответ:

A	B	C	D

357. Каждому из четырех неравенств в левом столбце соответствует одно из решений в правом столбце. Установите соответствие между неравенствами и их решениями.

НЕРАВЕНСТВА

А) $\frac{(x-2)^2}{x-1}<0$

Б) $(x-1)(x-2)<0$

В) $\log_2 x>1$

Г) $2^{-x}<\frac{1}{2}$

РЕШЕНИЯ

1) $(-\infty;1)$

2) $(2;+\infty)$

3) $(1;+\infty)$

4) $(1;2)$

Впишите в приведенную в ответе таблицу под каждой буквой соответствующий решению номер.

Ответ:

А	Б	В	Г

358. Каждому из четырех неравенств в левом столбце соответствует одно из решений в правом столбце. Установите соответствие между неравенствами и их решениями.

НЕРАВЕНСТВА

А) $\log_3 x<-1$

Б) $\log_3 x>-1$

В) $\log_3 x>1$

Г) $\log_3 x<1$

РЕШЕНИЯ

1) $\left(0;\frac{1}{3}\right)$

2) $(3;+\infty)$

3) $\left(\frac{1}{3};+\infty\right)$

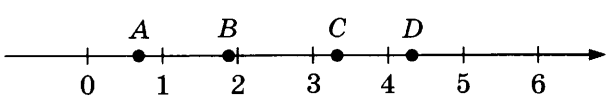
4) $(0;3)$

Впишите в приведенную в ответе таблицу под каждой буквой соответствующий решению номер.

Ответ:

А	Б	В	Г

359. На координатной прямой отмечены точки A, B, C и D.



Каждой точке соответствует одно из чисел в правом столбце. Установите соответствие между указанными точками и числами.

ТОЧКИ	ЧИСЛА
A	1) $\left(\frac{3}{10}\right)^{-1}$
B	2) $\log_3 2$
C	3) $\sqrt{3,5}$
D	4) $\frac{30}{7}$

Впишите в приведенную в ответе таблицу под каждой буквой соответствующий числу номер.

Ответ:

A	B	C	D

360. Каждому из четырех неравенств в левом столбце соответствует одно из решений в правом столбце. Установите соответствие между неравенствами и их решениями.

НЕРАВЕНСТВА	РЕШЕНИЯ
А) $\log_2 x < -2$	1) $0 < x < \frac{1}{4}$
Б) $\log_2 x > -2$	2) $x > \frac{1}{4}$
В) $\log_2 x < 2$	3) $0 < x < 4$
Г) $\log_2 x > 2$	4) $x > 4$

Впишите в приведенную в ответе таблицу под каждой буквой соответствующий решению номер.

Ответ:

А	Б	В	Г

361. Каждому из четырех неравенств в левом столбце соответствует одно из решений в правом столбце. Установите соответствие между неравенствами и их решениями.

НЕРАВЕНСТВА

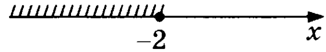
А) $2^x \leq 4$

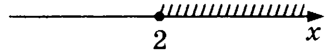
Б) $0{,}5^x \geq 4$

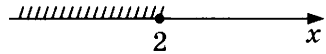
В) $2^x \geq 4$

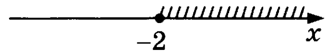
Г) $0{,}5^x \leq 4$

РЕШЕНИЯ

1) 

2) 

3) 

4) 

Впишите в приведенную в ответе таблицу под каждой буквой соответствующий решению номер.

Ответ:

А	Б	В	Г

362. Вычеркните в числе 85417627 три цифры так, чтобы получившееся число делилось на 18. В ответе укажите какое-нибудь одно получившееся число.

363. Найдите пятизначное число, кратное 18, любые две соседние цифры которого отличаются на 3. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

364. Найдите четырехзначное число, кратное 15, произведение цифр которого равно 60. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

365. Найдите трехзначное число, кратное 70, все цифры которого различны, а сумма квадратов цифр делится на 5, но не делится на 15. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

366. Найдите четырехзначное натуральное число, кратное 45, сумма цифр которого на 1 меньше их произведения. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

367. Вычеркните в числе 53164018 три цифры так, чтобы получившееся число делилось на 15. В ответе укажите какое-нибудь одно получившееся число.

368. Улитка за день заползает вверх по дереву на 4 м, а за ночь сползает на 1 м. Высота дерева 13 м. За сколько дней улитка доползет до вершины дерева от его подножия?

369. В обменном пункте можно совершить одну из двух операций:

— за 3 золотые монеты получить 4 серебряные и одну медную;

— за 7 серебряных монет получить 4 золотые и одну медную.

У Николая были только серебряные монеты. После нескольких посещений обменного пункта серебряных монет у него стало меньше, золотых не появилось, зато появилось 42 медные. На сколько уменьшилось количество серебряных монет у Николая?

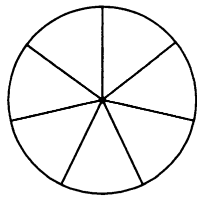
370. В корзине лежит 40 грибов: рыжики и грузди. Известно, что среди любых 17 грибов имеется хотя бы один рыжик, а среди любых 25 грибов — хотя бы один груздь. Сколько рыжиков в корзине?

371. Кузнечик прыгает вдоль координатной прямой в любом направлении на единичный отрезок за прыжок. Сколько существует различных точек на координатной прямой, в которых кузнечик может оказаться, сделав ровно 11 прыжков, начиная прыгать из начала координат?

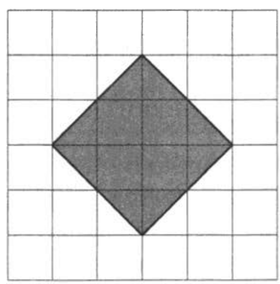
372. На кольцевой дороге расположено четыре бензоколонки: А, Б, В и Г. Расстояние между А и Б — 55 км, между А и В — 50 км, между В и Г — 40 км, между Г и А — 20 км (все расстояния измеряются вдоль кольцевой дороги по кратчайшей дуге). Найдите расстояние (в километрах) между Б и В.

373. Список заданий викторины состоял из 33 вопросов. За каждый правильный ответ ученик получал 7 очков, за неправильный ответ с него списывали 12 очков, а при отсутствии ответа давали 0 очков. Сколько верных ответов дал ученик, набравший 70 очков, если известно, что, по крайней мере, один раз он ошибся?

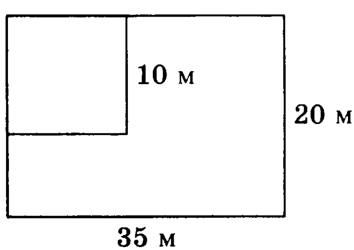
374. На рисунке показано, как выглядит колесо с 7 спицами. Сколько будет спиц в колесе, если угол между соседними спицами в нем будет равен 30°?



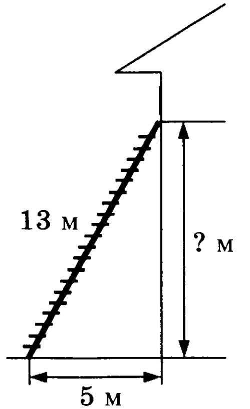
375. План местности разбит на клетки. Каждая клетка обозначает квадрат 1 м × 1 м. Найдите площадь участка, выделенного на плане. Ответ дайте в квадратных метрах.



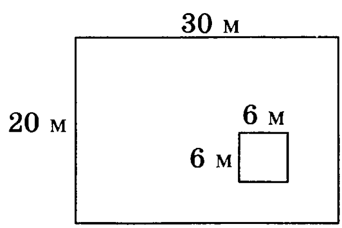
376. Дачный участок имеет форму прямоугольника со сторонами 35 м и 20 м. Хозяин планирует обнести его изгородью и отгородить такой же изгородью квадратный участок со стороной 10 м (см. рис.). Найдите суммарную длину изгороди в метрах.



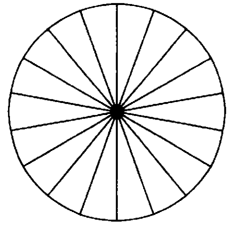
377. Пожарную лестницу длиной 13 м приставили к окну дома. Нижний конец лестницы отстоит от стены на 5 м. На какой высоте находится верхний конец лестницы? Ответ дайте в метрах.



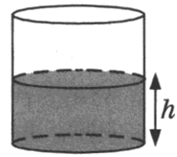
378. Дачный участок имеет форму прямоугольника, стороны которого равны 30 м и 20 м. Дом, расположенный на участке, имеет на плане форму квадрата со стороной 6 м. Найдите площадь оставшейся части участка, не занятой домом. Ответ дайте в квадратных метрах.



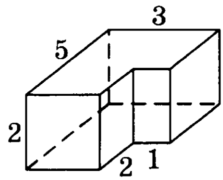
379. Колесо имеет 18 спиц. Углы между соседними спицами равны. Найдите величину угла (в градусах), который образуют две соседние спицы.



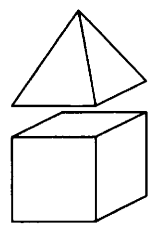
380. Вода в сосуде цилиндрической формы находится на уровне $h = 80$ см. На каком уровне окажется вода, если ее перелить в другой цилиндрический сосуд, у которого радиус основания вдвое больше, чем у данного? Ответ дайте в сантиметрах.



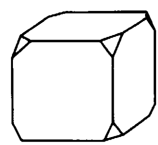
381. Деталь имеет форму изображенного на рисунке многогранника (все двугранные углы прямые). Числа на рисунке обозначают длины ребер в сантиметрах. Найдите объем этой детали. Ответ дайте в кубических сантиметрах.



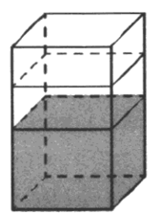
382. К кубу с ребром 1 приклеили правильную четырехугольную пирамиду с ребром 1 так, что квадратные грани совпали. Сколько граней у получившегося многогранника (невидимые ребра на рисунке не изображены)?



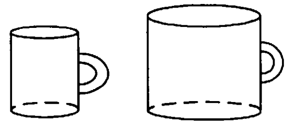
383. От деревянного кубика отпилили все его вершины (см. рис.). Сколько ребер у получившегося многогранника (невидимые ребра на рисунке не изображены)?



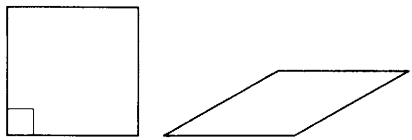
384. В бак, имеющий форму правильной четырехугольной призмы со стороной основания, равной 20 см, налита жидкость. Чтобы измерить объем детали сложной формы, ее полностью погружают в эту жидкость. Найдите объем детали, если после ее погружения уровень жидкости в баке поднялся на 10 см. Ответ дайте в кубических сантиметрах.



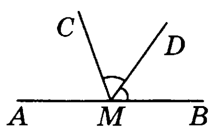
385. Даны две кружки цилиндрической формы. Первая кружка в полтора раза ниже второй, а вторая вдвое шире первой. Во сколько раз объем второй кружки больше объема первой?



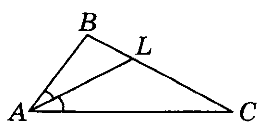
386. Ромб и квадрат имеют равные стороны. Найдите площадь ромба, если его острый угол равен 30°, а площадь квадрата равна 16.



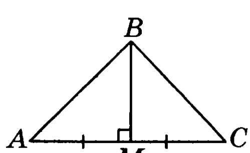
387. На прямой AB взята точка M. Луч MD — биссектриса угла CMB. Известно, что $\angle DMC = 63°$. Найдите угол CMA. Ответ дайте в градусах.



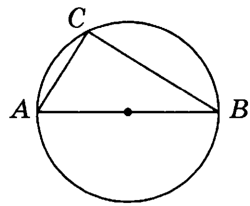
388. В треугольнике ABC проведена биссектриса AL, угол ALC равен 140°, угол ABC равен 123°. Найдите угол ACB. Ответ дайте в градусах.



389. В треугольнике ABC медиана BM перпендикулярна AC. Найдите AB, если $BM = 40$, $AC = 150$.

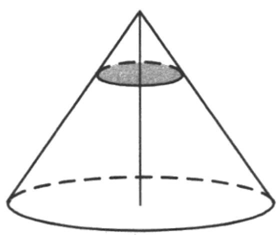


390. На окружности радиуса 5 отмечена точка C. Отрезок AB — диаметр окружности, $AC = 6$. Найдите $\cos\angle BAC$.

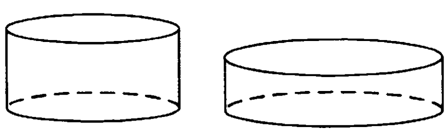


391. Сумма двух углов ромба равна 240°, а его периметр равен 24. Найдите меньшую диагональ ромба.

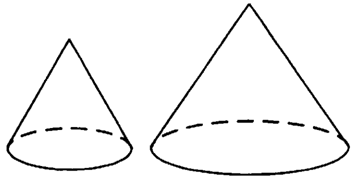
392. Через точку, делящую высоту конуса в отношении 1:3, считая от вершины, проведена плоскость, параллельная основанию. Найдите объем этого конуса, если объем конуса, отсекаемого от данного конуса проведенной плоскостью, равен 5.



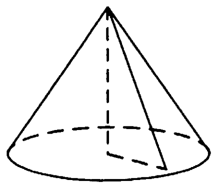
393. Даны два цилиндра. Радиус основания и высота первого равны соответственно 9 и 8, а второго — 12 и 3. Во сколько раз площадь боковой поверхности первого цилиндра больше площади боковой поверхности второго?



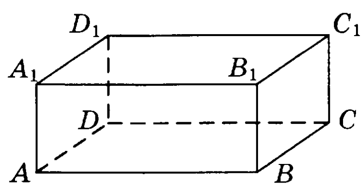
394. Даны два конуса. Радиус основания и образующая первого конуса равны соответственно 3 и 6, а второго — 4 и 9. Во сколько раз площадь боковой поверхности второго конуса больше площади боковой поверхности первого?



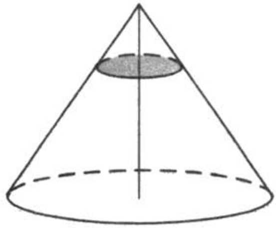
395. Объем конуса равен 24π, а радиус его основания равен 2. Найдите высоту конуса.



396. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ребра DA, DC и диагональ DA_1 боковой грани равны соответственно 3, 5 и $\sqrt{34}$. Найдите объем параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$.



397. Объем конуса равен 27. Через точку, делящую высоту конуса в отношении 1:2, считая от вершины, проведена плоскость, параллельная основанию. Найдите объем конуса, отсекаемого от данного конуса проведенной плоскостью.



398. В сентябре 1 кг слив стоил 60 рублей. В октябре сливы подорожали на 30%. Сколько рублей стоил 1 кг слив после подорожания в октябре?

399. Пачка сливочного масла стоит 50 рублей. Пенсионерам магазин делает скидку 10%. Сколько рублей стоит пачка масла для пенсионера?

400. Площадь земель фермерского хозяйства, отведенных под посадку сельскохозяйственных культур, составляет 24 га и распределена между зерновыми и овощными культурами в отношении 5:3 соответственно. Сколько гектаров занимают зерновые культуры?

401. Пачка сливочного масла стоит 60 рублей. Пенсионерам магазин делает скидку 5%. Сколько рублей стоит пачка масла для пенсионера?

402. В выборах участвовали два кандидата. Голоса избирателей распределились между ними в отношении 3:2. Сколько процентов голосов получил проигравший?

403. Налог на доходы составляет 13% от заработной платы. Заработная плата Ивана Кузьмича равна 9000 рублей. Какую сумму он получит после уплаты налога на доходы? Ответ дайте в рублях.

404. Радиус окружности, описанной около треугольника, можно вычислить по формуле $R=\dfrac{a}{2\sin\alpha}$, где a — сторона, α — противолежащий ей угол треугольника. Пользуясь этой формулой, найдите R, если $a=8$ и $\sin\alpha=\dfrac{1}{7}$.

405. В фирме «Эх, прокачу!» стоимость поездки на такси длительностью меньше 5 минут составляет 150 рублей. Если поездка длится 5 минут или более, то ее стоимость (в рублях) рассчитывается по формуле $C=150+11(t-5)$, где t — длительность поездки, выраженная в минутах

$(t \geq 5)$. Пользуясь этой формулой, рассчитайте стоимость 10-минутной поездки. Ответ укажите в рублях.

406. Площадь треугольника можно вычислить по формуле $S = \frac{abc}{4R}$, где a, b и c — стороны треугольника, а R — радиус окружности, описанной около этого треугольника. Пользуясь этой формулой, найдите S, если $a = 4$, $b = 13$, $c = 15$ и $R = \frac{65}{8}$.

407. Сумма углов правильного выпуклого многоугольника составляет $180°(n-2)$, где n — количество его углов. Пользуясь этой формулой, найдите n, если сумма углов равна 2700°.

408. Площадь прямоугольника вычисляется по формуле $S = \frac{d^2 \sin\alpha}{2}$, где d — длина диагонали, α — угол между диагоналями. Пользуясь этой формулой, найдите площадь S, если $d = 5$ и $\sin\alpha = \frac{2}{5}$.

409. Площадь треугольника вычисляется по формуле $S = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$, где b и c — две стороны треугольника, а α — угол между ними. Пользуясь этой формулой, найдите площадь S, если $b = 18$, $c = 16$ и $\sin\alpha = \frac{1}{3}$.

410. В летнем лагере 249 детей и 28 воспитателей. В одном автобусе можно перевозить не более 45 пассажиров. Какое наименьшее количество таких автобусов понадобится, чтобы за один раз перевезти всех из лагеря в город?

411. На автозаправке клиент отдал кассиру 1000 рублей и залил в бак 24 литра бензина. Цена бензина 37 рублей за литр. Сколько рублей сдачи должен получить клиент?

412. Для покраски 1 кв. м потолка требуется 200 г краски. Краска продается в банках по 2 кг. Какое наименьшее количество банок краски нужно для покраски потолка площадью 64 кв. м?

413. Стоимость полугодовой подписки на журнал составляет 450 рублей, а стоимость одного номера журнала — 21 рубль. За полгода Аня купила 25 номеров журнала. На сколько рублей меньше она бы потратила, если бы подписалась на журнал?

414. Сырок стоит 16 рублей. Какое наибольшее число сырков можно купить на 205 рублей?

415. Теплоход рассчитан на 720 пассажиров и 35 членов команды. Каждая спасательная шлюпка может вместить 60 человек. Какое наименьшее число шлюпок должно быть на теплоходе, чтобы в случае необходимости в них можно было разместить всех пассажиров и всех членов команды?

416. Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ	ЗНАЧЕНИЯ
А) объем ящика с яблоками	1) 108 л
Б) объем воды в озере Ханка	2) 900 $м^3$
В) объем бутылки соевого соуса	3) 0,2 л
Г) объем бассейна в спорткомплексе	4) 18,3 $км^3$

В таблице под каждой буквой, соответствующей величине, укажите номер ее возможного значения.

Ответ:

А	Б	В	Г

417. Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ	ЗНАЧЕНИЯ
А) площадь футбольного поля	1) 2511 кв. км
Б) площадь почтовой марки	2) 97,5 кв. см
В) площадь города Москвы	3) 7000 кв. м
Г) площадь купюры достоинством 100 рублей	4) 150 кв. мм

В таблице под каждой буквой, соответствующей величине, укажите номер ее возможного значения.

Ответ:

А	Б	В	Г

418. Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ	ЗНАЧЕНИЯ
А) площадь жилой комнаты	1) 624 кв. см
Б) площадь футбольного поля	2) 31 500 кв. км
В) площадь листа писчей бумаги	3) 7000 кв. м
Г) площадь озера Байкал	4) 20 кв. м

В таблице под каждой буквой, соответствующей величине, укажите номер ее возможного значения.

Ответ:

А	Б	В	Г

419. Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ	ЗНАЧЕНИЯ
А) масса грузовой машины	1) 8 кг
Б) масса дождевой капли	2) 20 мг
В) масса кота	3) 8 т
Г) масса алюминиевой столовой ложки	4) 32 г

В таблице под каждой буквой, соответствующей величине, укажите номер ее возможного значения.

Ответ:

А	Б	В	Г

420. Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ	ЗНАЧЕНИЯ
А) масса взрослого лося	1) 500 кг
Б) масса куриного яйца	2) 2,5 мг
В) масса активного вещества в таблетке	3) 50 г
Г) масса детской коляски	4) 14 кг

В таблице под каждой буквой, соответствующей величине, укажите номер ее возможного значения.

Ответ:

А	Б	В	Г

421. Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ	ЗНАЧЕНИЯ
А) объем воды в Азовском море	1) 1 л
Б) объем ящика с инструментами	2) 150 м^3
В) объем бутылки растительного масла	3) 256 км^3
Г) объем грузового отсека транспортного самолета	4) 36 л

В таблице под каждой буквой, соответствующей величине, укажите номер ее возможного значения.

Ответ:

А	Б	В	Г

422. В среднем из 500 садовых насосов, поступивших в продажу, 25 подтекает. Найдите вероятность того, что случайно выбранный для контроля насос подтекает.

423. Фабрика выпускает сумки. В среднем из 120 сумок, поступивших в продажу, 6 сумок имеют скрытый дефект. Найдите вероятность того, что случайно выбранная в магазине сумка окажется без дефектов.

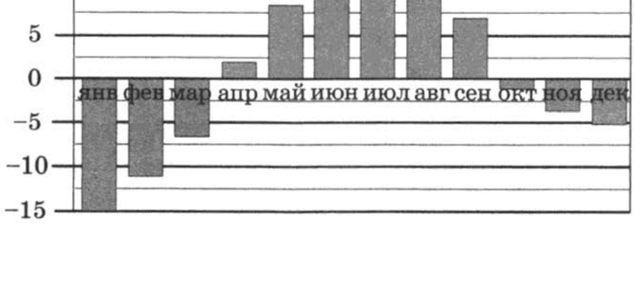
424. Конкурс исполнителей проводится в 5 дней. Всего заявлено 50 выступлений — по одному от каждой страны, участвующей в конкурсе. Исполнитель из России участвует в конкурсе. В первый день запланировано 14 выступлений, остальные распределены поровну между оставшимися днями. Порядок выступлений определяется жеребьевкой. Какова вероятность того, что выступление исполнителя из России состоится в третий день конкурса?

425. В чемпионате по гимнастике участвуют 80 спортсменок: 23 из Аргентины, 29 из Бразилии, остальные — из Парагвая. Порядок, в котором выступают гимнастки, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсменка, выступающая первой, окажется из Парагвая.

426. В ящике находятся черные и белые шары, причем черных в 3 раза больше, чем белых. Из ящика случайным образом достали один шар. Найдите вероятность того, что он будет белым.

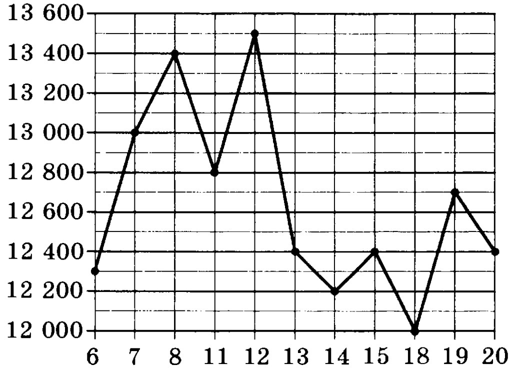
427. В коробке вперемешку лежат чайные пакетики с черным и зеленым чаем, одинаковые на вид, причем пакетиков с черным чаем в 4 раза больше, чем пакетиков с зеленым. Найдите вероятность того, что случайно выбранный из этой коробки пакетик окажется пакетиком с зеленым чаем.

428. На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Петрозаводске за каждый месяц 1976 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия.



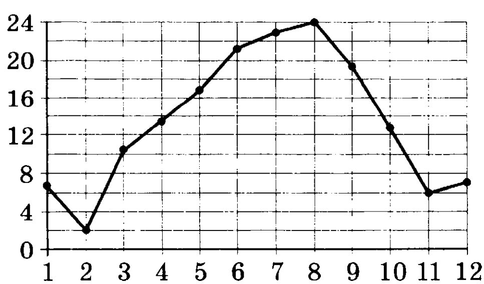
Определите по диаграмме, в каком месяце 1976 года средняя температура впервые стала положительной? В ответ запишите номер месяца.

429. На диаграмме жирными точками показана цена никеля на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 6 по 20 мая 2009 года. По горизонтали указаны числа месяца, по вертикали — цена никеля в долларах США за тонну. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией.



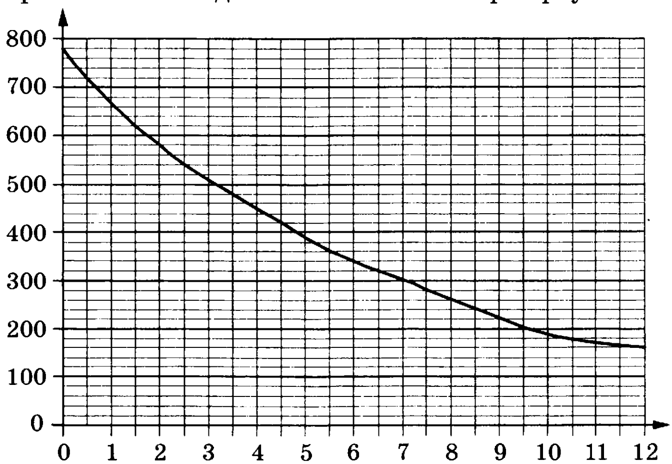
Определите по диаграмме, какого числа цена никеля на момент закрытия торгов была наибольшей за данный период.

430. На диаграмме жирными точками показана среднемесячная температура воздуха в Сочи за каждый месяц 1920 года. По горизонтали указаны номера месяцев, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Для наглядности жирные точки соединены линией.



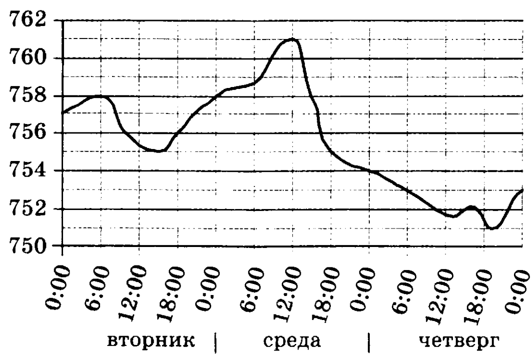
Определите по диаграмме, в каком месяце среднемесячная температура в Сочи была наименьшей за данный период. В ответе укажите номер этого месяца.

431. На графике изображена зависимость атмосферного давления от высоты над уровнем моря. На горизонтальной оси отмечена высота над уровнем моря в километрах, на вертикальной — давление в миллиметрах ртутного столба.



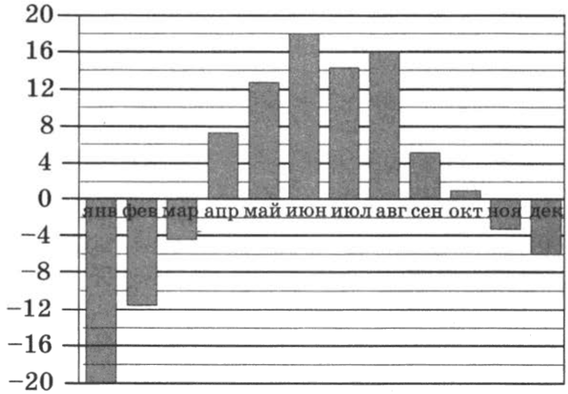
Определите по графику, чему равно атмосферное давление на высоте 9,5 км. Ответ дайте в миллиметрах ртутного столба.

432. На рисунке изображен график значений атмосферного давления в некотором городе за три дня. По горизонтали указаны дни недели и время, по вертикали — значения атмосферного давления в миллиметрах ртутного столба.



Определите по рисунку значение атмосферного давления в четверг в 6:00. Ответ дайте в миллиметрах ртутного столба.

433. На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Екатеринбурге (Свердловске) за каждый месяц 1973 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия.



Определите по диаграмме наибольшую среднемесячную температуру в 1973 году. Ответ дайте в градусах Цельсия.

434. Рейтинговое агентство определяет рейтинг электрических фенов для волос на основе средней цены P (в рублях за штуку), а также показателей функциональности F, качества Q и дизайна D. Рейтинг R вычисляется по формуле

$$R = 3(F + Q) + D - 0{,}01P.$$

В таблице даны цены и показатели четырех моделей фенов.

Модель фена	Средняя цена	Функциональность	Качество	Дизайн
А	1600	4	2	2
Б	900	3	1	2
В	1500	4	2	0
Г	800	2	1	1

Найдите наименьший рейтинг фена из представленных в таблице моделей.

435. На соревнованиях по прыжкам в воду судьи выставили оценки от 0 до 10 трем спортсменам. Результаты приведены в таблице.

Номер спортсмена	К*	I судья	II судья	III судья	IV судья	V судья	VI судья	VII судья
1	8	6,6	5,5	7,8	6,6	5,9	7,9	8,5
2	6	8,4	7,1	8,1	5,0	6,4	8,4	7,6
3	7	6,6	8,1	5,4	6,4	6,5	7,9	7,2

* К — коэффициент сложности.

Итоговый балл вычисляется следующим образом: две наибольшие и две наименьшие оценки отбрасываются, а три оставшиеся складываются, и их сумма умножается на коэффициент сложности.

В ответе укажите номера спортсменов, итоговый балл которых больше 140, без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

436. Телефонная компания предоставляет на выбор три тарифных плана.

Тарифный план	Абонентская плата (в месяц)	Плата за 1 минуту разговора
«Повременный»	Нет	1 руб.
«Комбинированный»	160 руб. за 300 мин.	1,5 руб. (сверх 300 мин. в месяц)
«Безлимитный»	499 руб.	Нет

Абонент предполагает, что общая длительность разговоров составит 500 минут в месяц, и исходя из этого выбирает наиболее дешевый тарифный план. Сколько рублей должен будет заплатить абонент за месяц, если общая длительность разговоров действительно будет равна 500 минутам?

437. Строительный подрядчик планирует купить 15 тонн облицовочного кирпича у одного из трех поставщиков. Один кирпич весит 5 кг. Цена кирпича и условия доставки всей покупки приведены в таблице.

Поставщик	Цена кирпича (руб. за шт.)	Стоимость доставки (руб.)	Специальные условия
А	17	7000	Нет
Б	18	6000	Доставка бесплатно, если сумма заказа превышает 50 000 руб.
В	19	5000	Доставка со скидкой 50%, если сумма заказа превышает 60 000 руб.

Во сколько рублей обойдется наиболее дешевый вариант покупки с доставкой?

438. Для того чтобы связать свитер, хозяйке нужно 900 граммов шерстяной пряжи синего цвета. Можно купить синюю пряжу по цене 70 рублей за 100 граммов, а можно купить неокрашенную пряжу по цене 60 рублей за 100 граммов и окрасить ее. Один пакетик краски стоит 50 рублей и рассчитан на окраску 300 граммов пряжи. Какой вариант покупки дешевле? В ответе напишите, сколько рублей будет стоить эта покупка.

439. Независимая экспертная лаборатория определяет рейтинг мясорубок на основе коэффициента ценности, равного 0,01 средней цены P (в рублях за штуку), показателей функциональности F, качества Q и дизайна D. Рейтинг R вычисляется по формуле

$$R = 4(2F + 2Q + D) - 0{,}01P.$$

В таблице даны цены и показатели четырех моделей мясорубок.

Модель мясорубки	Цена мясорубки (руб. за шт.)	Функциональность	Качество	Дизайн
А	2500	2	1	1
Б	3400	1	2	3
В	4200	4	2	4
Г	3300	1	3	2

Найдите наивысший среди рейтингов представленных моделей.

440. В таблице указаны доходы и расходы фирмы за 5 месяцев.

Месяц	Доход, тыс. руб.	Расход, тыс. руб.
Март	130	110
Апрель	120	115
Май	100	110
Июнь	120	80
Июль	80	70

Пользуясь таблицей, поставьте в соответствие каждому из указанных периодов времени характеристику доходов и расходов.

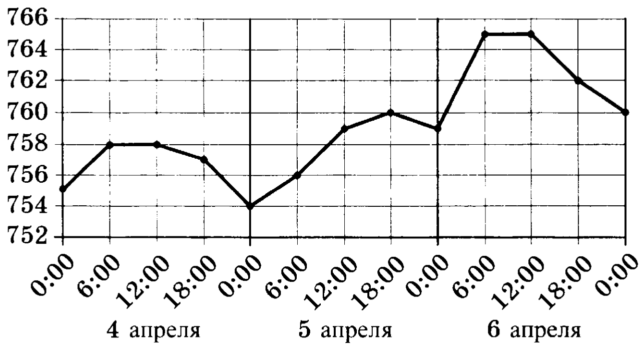
ПЕРИОДЫ ВРЕМЕНИ	ХАРАКТЕРИСТИКИ
А) апрель	1) расход в этом месяце превысил доход
Б) май	2) доход в этом месяце больше, чем доход в предыдущем
В) июнь	3) наименьший расход в период с апреля по июль
Г) июль	4) расход в этом месяце больше, чем расход в предыдущем

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

А	Б	В	Г

441. На диаграмме точками показано атмосферное давление в некотором городе на протяжении трех суток с 4 по 6 апреля 2013 года. В течение суток давление измеряется 4 раза: в 0:00, в 6:00, в 12:00 и в 18:00. По горизонтали указываются время суток и дата, по вертикали — давление в миллиметрах ртутного столба. Для наглядности точки соединены линиями.



Пользуясь диаграммой, поставьте в соответствие каждому из указанных периодов времени характеристику атмосферного давления в этом городе в течение этого периода.

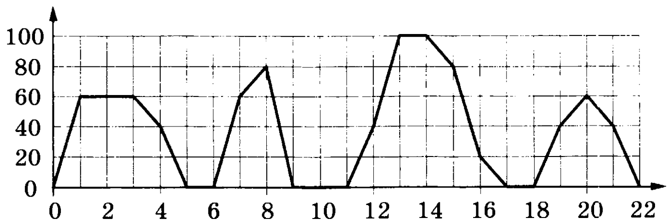
ПЕРИОДЫ ВРЕМЕНИ	ХАРАКТЕРИСТИКИ
А) вечер 4 апреля (с 18 до 0 часов)	1) давление падало
Б) день 5 апреля (с 12 до 18 часов)	2) давление росло, но не превышало 760 мм рт. ст.
В) ночь 6 апреля (с 0 до 6 часов)	3) давление не изменилось
Г) утро 6 апреля (с 6 до 12 часов)	4) наибольший рост давления

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

А	Б	В	Г

442. На графике изображена зависимость скорости движения рейсового автобуса от времени. На вертикальной оси отмечена скорость автобуса в км/ч, на горизонтальной — время в минутах, прошедшее с начала движения автобуса.



Пользуясь графиком, поставьте в соответствие каждому интервалу времени характеристику движения автобуса на этом интервале.

ИНТЕРВАЛЫ ВРЕМЕНИ

А) 0–4 мин.
Б) 4–8 мин.
В) 8–12 мин.
Г) 12–16 мин.

ХАРАКТЕРИСТИКИ

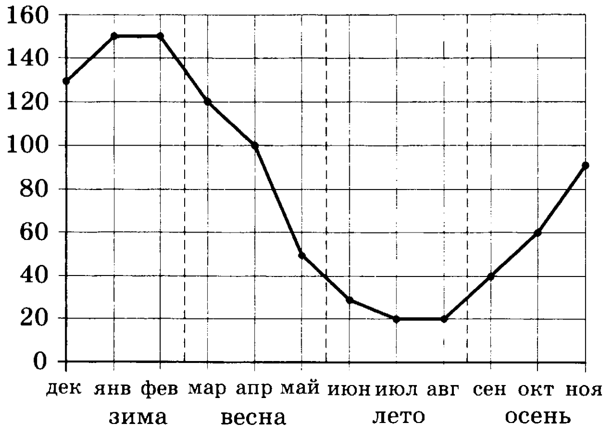
1) была остановка длительностью ровно 1 минута
2) две минуты автобус двигался с постоянной ненулевой скоростью
3) была остановка длительностью 2 минуты
4) скорость автобуса достигла максимума за все время движения

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

А	Б	В	Г

443. На диаграмме точками показаны объемы месячных продаж обогревателей в магазине бытовой техники. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — количество проданных обогревателей. Для наглядности точки соединены линией.



Пользуясь диаграммой, поставьте в соответствие каждому из указанных периодов времени характеристику продаж обогревателей.

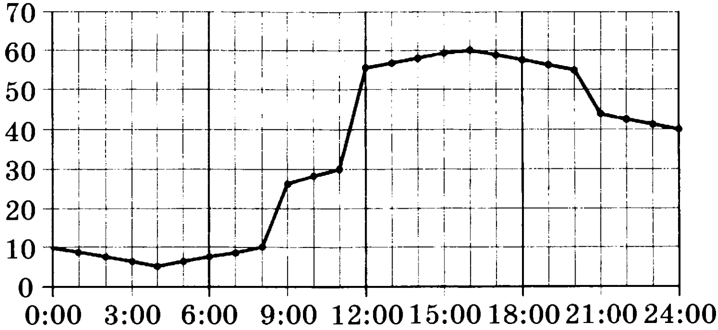
ПЕРИОДЫ ВРЕМЕНИ	ХАРАКТЕРИСТИКИ
А) зима	1) ежемесячный объем продаж достиг максимума
Б) весна	2) ежемесячный объем продаж был меньше 40 штук в течение всего периода
В) лето	3) ежемесячный объем продаж рос в течение всего периода
Г) осень	4) ежемесячный объем продаж падал в течение всего периода

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

А	Б	В	Г

444. На диаграмме точками показано потребление воды городской ТЭЦ на протяжении суток. По горизонтали указывается время, по вертикали — объем воды в кубометрах в час. Для наглядности точки соединены линией.



Пользуясь диаграммой, поставьте в соответствие каждому из указанных периодов времени характеристику потребления воды данной ТЭЦ в течение этого периода.

ПЕРИОДЫ ВРЕМЕНИ	ХАРАКТЕРИСТИКИ
А) ночь (с 0 до 6 часов)	1) потребление воды сначала росло, а потом падало
Б) утро (с 6 до 12 часов)	2) в течение всего периода потребление воды было меньше 20 кубометров в час
В) день (с 12 до 18 часов)	3) потребление воды падало в течение всего периода
Г) вечер (с 18 до 24 часов)	4) в течение всего периода потребление воды выросло более чем втрое

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

А	Б	В	Г

445. На диаграмме показано изменение цены акций компании на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни в период с 1 по 18 сентября 2012 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена акции в рублях за штуку. Для наглядности точки соединены линией.

Пользуясь диаграммой, поставьте в соответствие каждому из указанных периодов времени характеристику изменения цены акций.

ПЕРИОДЫ ВРЕМЕНИ	ХАРАКТЕРИСТИКИ
А) 1–5 сентября	1) цена достигла максимума за весь период
Б) 6–8 сентября	2) цена акции не опускалась ниже 1300 рублей за штуку
В) 11–13 сентября	3) цена акции не превосходила 1300 рублей за штуку
Г) 14–18 сентября	4) цена акций ежедневно росла

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

А	Б	В	Г

446. В классе учится 20 человек, из них 13 человек посещают кружок по истории, а 10 — кружок по математике. Выберите утверждения, которые верны при указанных условиях.

1) Найдутся хотя бы двое из этого класса, кто посещает оба кружка.
2) Каждый ученик этого класса посещает оба кружка.
3) Не найдется 11 человек из этого класса, которые посещают оба кружка.

4) Если ученик из этого класса ходит на кружок по истории, то он обязательно ходит на кружок по математике.

В ответе запишите номера выбранных утверждений без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

447. В фирме N работают 50 сотрудников, из них 40 человек знают английский язык, а 20 — немецкий. Выберите утверждения, которые верны при указанных условиях.

1) Не более 20 сотрудников этой фирмы знают и английский, и немецкий языки.
2) В этой фирме нет ни одного сотрудника, знающего и английский, и немецкий языки.
3) Если сотрудник этой фирмы знает английский язык, то он знает и немецкий.
4) В фирме N хотя бы три сотрудника знают и английский, и немецкий языки.

В ответе запишите номера выбранных утверждений без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

448. Среди дачников в поселке есть те, кто выращивает виноград, и есть те, кто выращивает груши. А также есть те, кто не выращивает ни виноград, ни груши. Некоторые дачники в этом поселке, выращивающие виноград, также выращивают и груши. Выберите утверждения, которые верны при указанных условиях.

1) Если дачник в этом поселке выращивает виноград, то он не выращивает груши.
2) Есть хотя бы один дачник в этом поселке, который выращивает и груши, и виноград.
3) Среди тех, кто выращивает виноград, есть дачники из этого поселка.
4) Если дачник из этого поселка не выращивает виноград, то он выращивает груши.

В ответе запишите номера выбранных утверждений без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

449. Хозяйка к празднику купила торт, ананас, сок и мясную нарезку. Торт стоил дороже ананаса, но дешевле мясной нарезки, сок стоил дешевле торта. Выберите утверждения, которые верны при указанных условиях.

1) Ананас стоил дешевле мясной нарезки.
2) За сок заплатили больше, чем за мясную нарезку.
3) Мясная нарезка — самая дорогая из покупок.
4) Торт — самая дешевая из покупок.

В ответе запишите номера выбранных утверждений без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

450. При взвешивании животных в зоопарке выяснилось, что буйвол тяжелее льва, медведь легче буйвола, а рысь легче льва. Выберите утверждения, которые верны при указанных условиях.

1) Рысь легче буйвола.
2) Рысь тяжелее буйвола.
3) Буйвол самый тяжелый из всех этих животных.
4) Медведь тяжелее буйвола.

В ответе запишите номера выбранных утверждений без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

451. В поселке городского типа всего 12 жилых домов. Высота каждого дома меньше 30 метров, но не меньше 9 метров. Выберите утверждения, которые верны при указанных условиях.

1) Высота любого жилого дома в поселке не меньше 7 метров.
2) В поселке нет жилого дома высотой 8 метров.
3) В поселке есть жилой дом высотой 30 метров.
4) Разница в высоте любых двух жилых домов поселка больше 3 метров.

В ответе запишите номера выбранных утверждений без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

БАЗОВЫЙ ЕГЭ

Тренировочные варианты

ВАРИАНТ 1

1. Найдите значение выражения $\frac{2{,}4}{5{,}4-7{,}8}$.

Ответ: __________________.

2. Найдите значение выражения $\frac{3^5}{3^3\cdot 3}$.

Ответ: __________________.

3. Городской бюджет составляет 60 млн рублей, а расходы на одну из его статей составили 35%. Сколько миллионов рублей потрачено на эту статью бюджета?

Ответ: __________________.

4. Теорему синусов можно записать в виде $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}$, где a и b — две стороны треугольника, а α и β — углы треугольника, лежащие против них соответственно. Пользуясь этой формулой, найдите величину $\sin\alpha$, если $a=13$, $b=5$, $\sin\beta=\frac{1}{26}$.

Ответ: __________________.

5. Найдите $\sin\alpha$, если $\cos\alpha=\frac{\sqrt{21}}{5}$ и $0^\circ<\alpha<90^\circ$.

Ответ: __________________.

6. Таксист за месяц проехал 10 000 км. Цена бензина 32 рубля за литр. Средний расход бензина на 100 км составляет 10 литров. Сколько рублей потратил таксист на бензин за этот месяц?

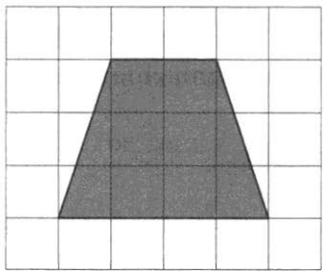
Ответ: __________________.

7. Решите уравнение $x^2 = 7x + 8$.

Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.

Ответ: ____________________.

8. План местности разбит на клетки. Каждая клетка обозначает квадрат 1 м × 1 м. Найдите площадь участка, выделенного на плане. Ответ дайте в квадратных метрах.



Ответ: ____________________.

9. Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ	ЗНАЧЕНИЯ
А) длина реки Москвы	1) 79,3 м
Б) высота вагона	2) 370 см
В) высота Троицкой башни Кремля	3) 502 км
Г) рост восьмилетнего ребенка	4) 134 см

В таблице под каждой буквой, соответствующей величине, укажите номер ее возможного значения.

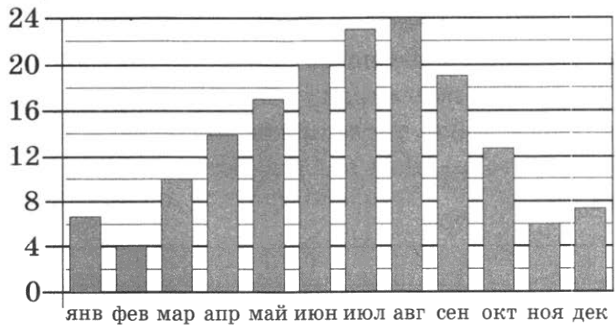
Ответ:

А	Б	В	Г

10. Фабрика выпускает сумки. В среднем из 125 сумок 5 сумок имеют скрытый дефект. Найдите вероятность того, что случайно выбранная сумка окажется с дефектом.

Ответ: ________________.

11. На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Сочи за каждый месяц 1920 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия.



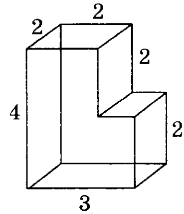
Определите по диаграмме наименьшую среднемесячную температуру во второй половине 1920 года. Ответ дайте в градусах Цельсия.

Ответ: ________________.

12. Семья из трех человек планирует поехать из Санкт-Петербурга в Вологду. Можно ехать поездом, а можно — на своей машине. Билет на поезд на одного человека стоит 810 рублей. Автомобиль расходует 10 литров бензина на 100 километров пути, расстояние по шоссе равно 700 км, а цена бензина равна 35 рублям за литр. Сколько рублей придется заплатить за наиболее дешевую поездку на троих?

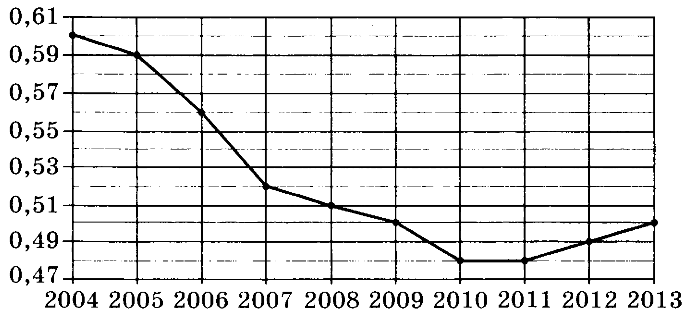
Ответ: ________________.

13. Деталь имеет форму изображенного на рисунке многогранника (все двугранные углы прямые). Числа на рисунке обозначают длины ребер в сантиметрах. Найдите объем этой детали. Ответ дайте в кубических сантиметрах.



Ответ: ____________________.

14. На диаграмме точками показан прирост населения Китая в период с 2004 по 2013 год. По горизонтали указывается год, по вертикали — прирост населения в процентах (увеличение численности населения относительно прошлого года). Для наглядности точки соединены линией.



Пользуясь диаграммой, поставьте в соответствие каждому из указанных периодов времени характеристику прироста населения Китая.

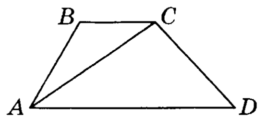
ПЕРИОДЫ ВРЕМЕНИ	ХАРАКТЕРИСТИКИ
А) 2004–2006 гг.	1) наибольшее падение прироста населения
Б) 2006–2007 гг.	2) прирост населения оставался выше 0,55%
В) 2008–2011 гг.	3) прирост населения достиг минимума
Г) 2011–2012 гг.	4) прирост населения увеличился

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

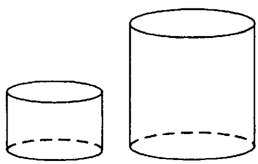
А	Б	В	Г

15. В трапеции $ABCD$ известно, что $AD = 3$, $BC = 1$, а ее площадь равна 12. Найдите площадь треугольника ABC.



Ответ: _________________.

16. Даны два цилиндра. Радиус основания и высота первого равны соответственно 3 и 2, а второго — 8 и 9. Во сколько раз объем второго цилиндра больше объема первого?



Ответ: _________________.

17. Каждому из четырех неравенств в левом столбце соответствует одно из решений в правом столбце. Установите соответствие между неравенствами и их решениями.

НЕРАВЕНСТВА

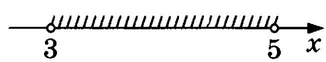
А) $5^{-x+1} < \frac{1}{25}$

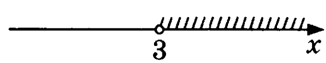
Б) $\frac{x-5}{(x-3)^2} < 0$

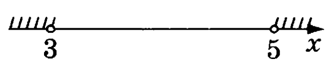
В) $\log_2(x-3) < 1$

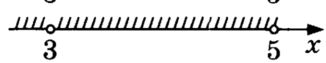
Г) $(x-3)(x-5) > 0$

РЕШЕНИЯ

1) 

2) 

3) 

4) 

Впишите в приведенную в ответе таблицу под каждой буквой соответствующий решению номер.

Ответ:

А	Б	В	Г

18. Повар испек 40 печений, из них 10 печений он посыпал корицей, а 20 печений посыпал сахаром. Выберите утверждения, которые верны при указанных условиях.

1) Не может оказаться больше 10 печений, посыпанных и сахаром, и корицей.
2) Если печенье посыпано сахаром, то оно посыпано и корицей.
3) Найдется 20 печений, посыпанных и сахаром, и корицей.
4) Найдется 10 печений, которые ничем не посыпаны.

В ответе запишите номера выбранных утверждений без пробелов, запятых и других дополнительных символов.
Ответ: ________________.

19. Вычеркните в числе 141565041 три цифры так, чтобы получившееся число делилось на 30. В ответе укажите какое-нибудь одно получившееся число.

Ответ: ________________.

20. В обменном пункте можно совершить одну из двух операций:

- за 3 золотые монеты получить 4 серебряные и одну медную;
- за 6 серебряных монет получить 4 золотые и одну медную.

У Николая были только серебряные монеты. После нескольких посещений обменного пункта серебряных монет у него стало меньше, золотых не появилось, зато появилось 35 медных. На сколько уменьшилось количество серебряных монет у Николая?

Ответ: ________________.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

ВАРИАНТ 2

1. Найдите значение выражения $\frac{7,3-2,5}{1,2}$.

Ответ: ________________.

2. Найдите значение выражения $\frac{4^3}{2^5}$.

Ответ: ________________.

3. Число больных гриппом в школе уменьшилось за месяц в четыре раза. На сколько процентов уменьшилось число больных гриппом?

Ответ: ________________.

4. Зная длину своего шага, человек может приближенно подсчитать пройденное им расстояние s по формуле $s=nl$, где n — число шагов, l — длина шага. Какое расстояние прошел человек, если $l = 80$ см, $n = 1600$? Ответ дайте в метрах.

Ответ: ________________.

5. Найдите значение выражения $\frac{6\sqrt{112}}{\sqrt{7}}$.

Ответ: ________________.

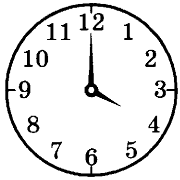
6. В летнем лагере на каждого участника полагается 50 г сахара в день. В лагере 229 человек. Какое наименьшее количество килограммовых упаковок сахара нужно на весь лагерь на 7 дней?

Ответ: ________________.

7. Решите уравнение $x^2=-x$.
Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.

Ответ: ________________.

8. Какой наименьший угол (в градусах) образуют минутная и часовая стрелки часов в 16:00?



Ответ: ________________.

9. Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ	ЗНАЧЕНИЯ
А) длительность звучания одной песни	1) 0,2 секунды
Б) длительность полнометражного мультипликационного фильма	2) 687 суток
В) продолжительность вспышки фотоаппарата	3) 90 минут
Г) время обращения Марса вокруг Солнца	4) 4 минуты

В таблице под каждой буквой, соответствующей величине, укажите номер ее возможного значения.

Ответ:

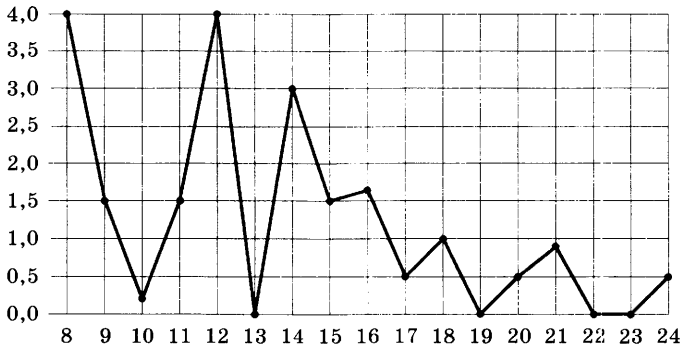
А	Б	В	Г

10. В фирме такси в наличии 20 легковых автомобилей: 7 из них черного цвета с желтыми надписями на боках, остальные — желтого цвета с черными надписями. Найдите вероятность того, что на случайный вызов приедет машина желтого цвета с черными надписями.

Ответ: ________________.

11. На диаграмме жирными точками показано суточное количество осадков, выпадавших в Томске с 8 по 24 января

2005 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — количество осадков, выпавших в соответствующий день, в миллиметрах. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией.



Определите по диаграмме, сколько дней за данный период суточное количество осадков превышало 2 мм. Ответ дайте в миллиметрах.

Ответ: ________________.

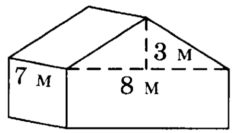
12. В трех салонах сотовой связи один и тот же смартфон продается в кредит на разных условиях. Условия приведены в таблице.

Салон	Стоимость смартфона (руб.)	Первоначальный взнос (в % от стоимости)	Срок кредита (мес.)	Сумма ежемесячного платежа (руб.)
Эпсилон	19800	10	6	3200
Дельта	20200	10	12	1580
Омикрон	20800	20	6	2900

Определите, в каком из салонов покупка обойдется дешевле всего (с учетом переплаты). В ответ запишите стоимость этой покупки в рублях.

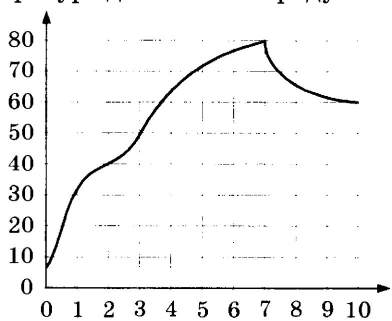
Ответ: ________________.

13. Двускатную крышу дома, имеющего в основании прямоугольник (см. рис.), необходимо полностью покрыть рубероидом. Высота крыши равна 3 м, длины стен дома равны 7 м и 8 м. Найдите, сколько рубероида (в квадратных метрах) нужно для покрытия этой крыши, если скаты крыши равны.



Ответ: ________________.

14. На графике изображена зависимость температуры от времени в процессе разогрева двигателя легкового автомобиля. На горизонтальной оси отмечено время в минутах, прошедшее с момента запуска двигателя, на вертикальной оси — температура двигателя в градусах Цельсия.



Пользуясь графиком, поставьте в соответствие каждому интервалу времени характеристику температуры.

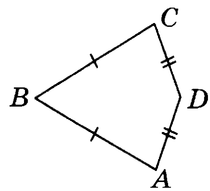
ИНТЕРВАЛЫ ВРЕМЕНИ	ХАРАКТЕРИСТИКИ
А) 0–1 мин.	1) самый быстрый рост температуры
Б) 2–3 мин.	2) температура росла и на всем интервале была выше 60 °С
В) 4–6 мин.	3) температура находилась в пределах от 40 °С до 50 °С
Г) 7–9 мин.	4) температура падала

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

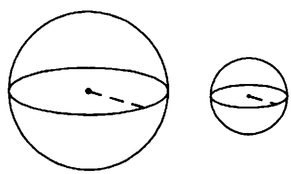
А	Б	В	Г

15. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ известно, что $AB = BC$, $AD = CD$, $\angle B = 55°$, $\angle D = 137°$. Найдите угол A. Ответ дайте в градусах.



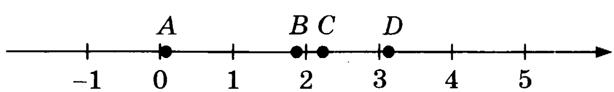
Ответ: ________________.

16. Даны два шара с радиусами 9 и 3. Во сколько раз площадь поверхности большего шара больше площади поверхности меньшего?



Ответ: ________________.

17. На координатной прямой отмечены точки A, B, C и D.



Каждой точке соответствует одно из чисел в правом столбце. Установите соответствие между указанными точками и числами.

ТОЧКИ	ЧИСЛА
A	1) $\left(\dfrac{37}{3}\right)^{-1}$
B	2) $\dfrac{29}{13}$
C	3) $\log_5 20$
D	4) $\sqrt{10}$

Впишите в приведенную в ответе таблицу под каждой буквой соответствующий числу номер.

Ответ:

A	*B*	*C*	*D*

18. В фирме N работают 100 человек, из них 70 человек знают португальский язык, а 50 — французский. Выберите утверждения, которые верны при указанных условиях.

1) Не более 50 человек из этой фирмы знают и португальский, и французский языки.
2) Нет ни одного человека в этой фирме, знающего и португальский, и французский языки.
3) В фирме N хотя бы пять человек знают и португальский, и французский языки.
4) Если человек из этой фирмы знает португальский язык, то он знает и французский.

В ответе запишите номера выбранных утверждений без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

Ответ: ___________________.

19. Найдите четное пятизначное натуральное число, сумма цифр которого равна их произведению. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

Ответ: ___________________.

20. Во всех подъездах дома одинаковое число этажей, и на всех этажах одинаковое число квартир. При этом число этажей в доме больше числа квартир на этаже, число квартир на этаже больше числа подъездов, а число подъездов больше одного. Сколько этажей в доме, если всего в нем 357 квартир?

Ответ: ___________________.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

ВАРИАНТ 3

1. Найдите значение выражения $\left(\frac{5}{7}-\frac{3}{7}\right):\frac{2}{21}$.

Ответ: ________________.

2. Найдите значение выражения $2^6\cdot\frac{2^{-2}}{2^2}$.

Ответ: ________________.

3. Число посетителей сайта увеличилось за месяц втрое. На сколько процентов увеличилось число посетителей сайта за этот месяц?

Ответ: ________________.

4. Площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда с ребрами a, b и c вычисляется по формуле $S=2(ab+ac+bc)$. Найдите площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда с ребрами 3, 4 и 6.

Ответ: ________________.

5. Найдите значение выражения $\frac{4\sqrt{48}}{\sqrt{3}}$.

Ответ: ________________.

6. В среднем за день во время конференции расходуется 90 пакетиков чая. Конференция длится 7 дней. В пачке чая 100 пакетиков. Какого наименьшего количества пачек чая хватит на все дни конференции?

Ответ: ________________.

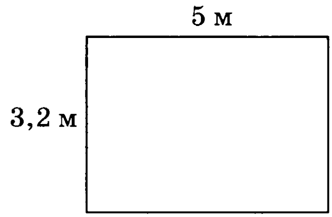
7. Решите уравнение $x^2=4$.

Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.

Ответ: ________________.

8. На плане указано, что прямоугольная комната имеет площадь 16,3 кв. м. Точные измерения показали, что ширина комнаты равна 3,2 м, а длина 5 м. На сколько

квадратных метров площадь комнаты отличается от значения, указанного на плане?



Ответ: ________________.

9. Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ	ЗНАЧЕНИЯ
А) высота Исаакиевского собора в Санкт-Петербурге	1) 102 м
Б) длина реки Оби	2) 2,8 м
В) длина тела кошки	3) 54 см
Г) высота потолка в комнате	4) 3650 км

В таблице под каждой буквой, соответствующей величине, укажите номер ее возможного значения.

Ответ:

А	Б	В	Г

10. У бабушки 25 чашек: 5 с красными цветами, остальные с синими. Бабушка наливает чай в случайно выбранную чашку. Найдите вероятность того, что это будет чашка с синими цветами.

Ответ: ________________.

11. В соревнованиях по метанию молота участники показали следующие результаты:

Спортсмен	Результат попытки, м					
	I	II	III	IV	V	VI
Лаптев	55,5	54,5	55	53,5	54	52
Монакин	52,5	53	51,5	56	55,5	55
Таль	53,5	54	54,5	54	54,5	52
Овсов	52,5	52	52,5	51,5	53	52

Места распределяются по результатам лучшей попытки каждого спортсмена: чем дальше он метнул молот, тем лучше.

Какое место занял спортсмен Лаптев?

Ответ: ____________________.

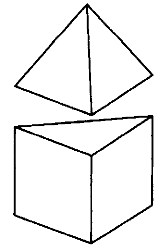
12. Интернет-провайдер предлагает три тарифных плана.

Тарифный план	Абонентская плата	Плата за трафик
План «0»	Нет	2,5 руб. за 1 Мбайт
План «500»	550 руб. за 500 Мбайт трафика в месяц	2 руб. за 1 Мбайт сверх 500 Мбайт
План «800»	700 руб. за 800 Мбайт трафика в месяц	1,5 руб. за 1 Мбайт сверх 800 Мбайт

Пользователь предполагает, что его трафик составит 600 Мбайт в месяц, и исходя из этого выбирает наиболее дешевый тарифный план. Сколько рублей должен будет заплатить пользователь за месяц, если его трафик действительно будет равен 600 Мбайт?

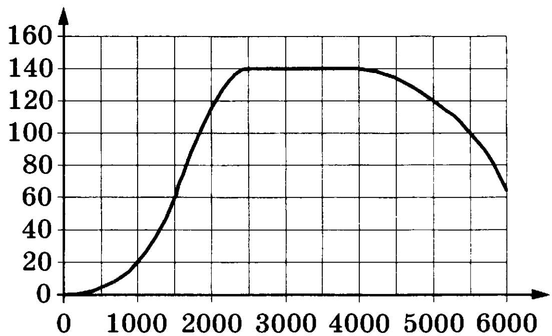
Ответ: ____________________.

13. К правильной треугольной призме со стороной основания 1 приклеили правильную треугольную пирамиду с ребром 1 так, что основания совпали. Сколько граней у получившегося многогранника (невидимые ребра на рисунке не изображены)?



Ответ: ____________________.

14. На графике изображена зависимость крутящего момента двигателя от числа оборотов в минуту. На горизонтальной оси отмечено число оборотов в минуту, на вертикальной оси — крутящий момент в Н · м.



Пользуясь графиком, поставьте в соответствие каждому интервалу числа оборотов в минуту характеристику крутящего момента.

ИНТЕРВАЛЫ

А) 0–1000 об./мин.
Б) 1500–2000 об./мин.
В) 3000–4000 об./мин.
Г) 4000–6000 об./мин.

ХАРАКТЕРИСТИКИ

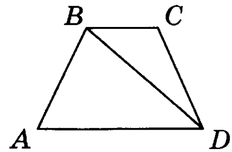
1) при увеличении числа оборотов крутящий момент не меняется
2) крутящий момент не превышает 20 Н · м на всем интервале
3) при увеличении числа оборотов самый быстрый рост крутящего момента
4) при увеличении числа оборотов крутящий момент падает

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

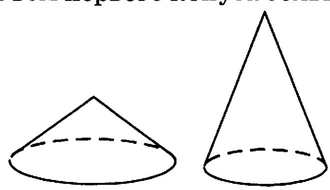
А	Б	В	Г

15. В трапеции $ABCD$ известно, что $AB = CD$, $\angle BDA = 54°$ и $\angle BDC = 23°$. Найдите угол ABD. Ответ дайте в градусах.



Ответ: ________________.

16. Даны два конуса. Радиус основания и высота первого конуса равны соответственно 3 и 2, а второго — 2 и 3. Во сколько раз объем первого конуса больше объема второго?



Ответ: ________________.

17. Каждому из четырех неравенств в левом столбце соответствует одно из решений в правом столбце. Установите соответствие между неравенствами и их решениями.

НЕРАВЕНСТВА	РЕШЕНИЯ
А) $(x-3)(x-5)>0$	1) $3<x<5$
Б) $\log_2(x-3)<1$	2) $x<3$ или $x>5$
В) $\dfrac{x-5}{(x-3)^2}<0$	3) $x>3$
Г) $5^{-x+1}<\dfrac{1}{25}$	4) $x<3$ или $3<x<5$

Впишите в приведенную в ответе таблицу под каждой буквой соответствующий решению номер.

Ответ:

А	Б	В	Г

18. Среди тех, кто зарегистрирован в «ВКонтакте», есть школьники из Твери. Среди школьников из Твери есть те, кто зарегистрирован в «Одноклассниках». Выберите утверждения, которые верны при указанных условиях.

1) Среди школьников из Твери нет тех, кто зарегистрирован в «ВКонтакте».
2) Все школьники из Твери не зарегистрированы ни в «ВКонтакте», ни в «Одноклассниках».
3) Хотя бы один из пользователей «Одноклассников» является школьником из Твери.
4) Среди школьников из Твери есть те, кто зарегистрирован в «ВКонтакте».

В ответе запишите номера выбранных утверждений без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

Ответ: __________________.

19. Найдите пятизначное число, кратное 15, любые две соседние цифры которого отличаются на 3. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

Ответ: __________________.

20. Саша пригласил Петю в гости, сказав, что живет в восьмом подъезде в квартире № 468, а этаж сказать забыл. Подойдя к дому, Петя обнаружил, что дом двенадцатиэтажный. На каком этаже живет Саша? (На всех этажах число квартир одинаково, нумерация квартир в доме начинается с единицы.)

Ответ: __________________.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

ВАРИАНТ 4

1. Найдите значение выражения $13:\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{7}\right)$.

Ответ: ________________.

2. Найдите значение выражения $2\cdot(-1)^3+5\cdot(-1)^4$.

Ответ: ________________.

3. На пост председателя школьного совета претендовали два кандидата. В голосовании приняли участие 99 человек. Голоса между кандидатами распределились в отношении 2:7. Сколько голосов получил победитель?

Ответ: ________________.

4. Площадь трапеции вычисляется по формуле $S=\frac{a+b}{2}\cdot h$, где a и b — длины оснований трапеции, h — ее высота. Пользуясь этой формулой, найдите площадь S, если $a=3$, $b=8$ и $h=4$.

Ответ: ________________.

5. Найдите значение выражения $\frac{3\cdot\sqrt{5\cdot 6}}{\sqrt{2\cdot 15}}$.

Ответ: ________________.

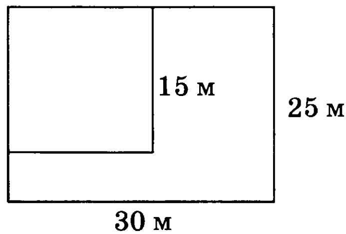
6. По расписанию поезд Самара–Волгоград отправляется в 7:58, а прибывает в 2:58 на следующий день (время московское). Сколько часов согласно расписанию поезд находится в пути?

Ответ: ________________.

7. Найдите корень уравнения $\sqrt{14-5x}=3$.

Ответ: ________________.

8. Дачный участок имеет форму прямоугольника со сторонами 25 м и 30 м. Хозяин отгородил на участке квадратный вольер со стороной 15 м (см. рис.). Найдите площадь оставшейся части участка. Ответ дайте в квадратных метрах.



Ответ: __________________.

9. Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ	ЗНАЧЕНИЯ
А) площадь тетрадного листа	1) 2511 кв. км
Б) площадь письменного стола	2) 162 кв. м
В) площадь города Москвы	3) 1,2 кв. м
Г) площадь волейбольной площадки	4) 600 кв. см

В таблице под каждой буквой, соответствующей величине, укажите номер ее возможного значения.

Ответ:

А	Б	В	Г

10. В соревнованиях по толканию ядра участвуют 6 спортсменов из Великобритании, 3 спортсмена из Франции, 6 спортсменов из Германии и 10 — из Италии. Порядок, в котором выступают спортсмены, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсмен, выступающий последним, окажется из Франции.

Ответ: __________________.

11. В таблице показано распределение медалей на зимних Олимпийских играх в Сочи среди стран, занявших первые 10 мест по количеству золотых медалей.

Место	Страна	Медали			
		золотые	серебряные	бронзовые	всего
1	Россия	13	11	9	33
2	Норвегия	11	5	10	26
3	Канада	10	10	5	25
4	США	9	7	12	28
5	Нидерланды	8	7	9	24
6	Германия	8	6	5	19
7	Швейцария	6	3	2	11
8	Белоруссия	5	0	1	6
9	Австрия	4	8	5	17
10	Франция	4	4	7	15

Определите с помощью таблицы, сколько серебряных медалей у страны, занявшей второе место по числу золотых медалей.

Ответ: ________________.

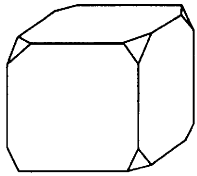
12. Клиент хочет арендовать автомобиль на сутки для поездки протяженностью 600 км. В таблице приведены характеристики трех автомобилей и стоимость их аренды.

Автомобиль	Топливо	Расход топлива (л на 100 км)	Арендная плата (руб. за 1 сутки)
А	Дизельное	8	3850
Б	Бензин	9	3300
В	Газ	15	3300

Помимо аренды, клиент обязан оплатить топливо для автомобиля на всю поездку. Цена дизельного топлива — 25 рублей за литр, бензина — 35 рублей за литр, газа — 20 рублей за литр. Сколько рублей заплатит клиент за аренду и топливо, если выберет самый дешевый вариант?

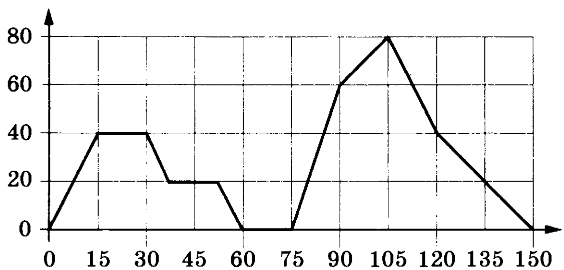
Ответ: ________________.

13. От деревянного кубика отпилили все его вершины (см. рис.). Сколько граней у получившегося многогранника (невидимые ребра на рисунке не изображены)?



Ответ: ____________________.

14. На графике изображена зависимость скорости движения легкового автомобиля от времени. На вертикальной оси отмечена скорость легкового автомобиля в км/ч, на горизонтальной — время в секундах, прошедшее с начала движения автомобиля.



Пользуясь графиком, поставьте в соответствие каждому интервалу времени характеристику движения автомобиля на этом интервале.

ИНТЕРВАЛЫ ВРЕМЕНИ

А) 30–60 с

Б) 60–90 с

В) 90–120 с

Г) 120–150 с

ХАРАКТЕРИСТИКИ

1) скорость автомобиля постоянно уменьшалась

2) скорость автомобиля достигла максимума за все время движения

3) автомобиль не увеличивал скорость на всем интервале и некоторое время ехал с постоянной скоростью

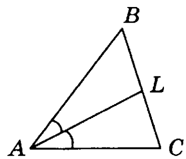
4) автомобиль сделал остановку на 15 секунд

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

А	Б	В	Г

15. В треугольнике ABC проведена биссектриса AL, угол ALC равен 86°, угол ABC равен 73°. Найдите угол ACB. Ответ дайте в градусах.



Ответ: ___________________.

16. Объем конуса равен 24π, а его высота равна 8. Найдите радиус основания конуса.

Ответ: ___________________.

17. Каждому из четырех чисел в левом столбце соответствует отрезок, которому оно принадлежит. Установите соответствие между числами и отрезками из правого столбца.

ЧИСЛА	ОТРЕЗКИ
А) $\log_2 35$	1) [1; 2]
Б) $\sqrt{13}$	2) [2; 3]
В) $0{,}39^{-1}$	3) [3; 4]
Г) $\frac{7}{4}$	4) [5; 6]

Впишите в приведенную в ответе таблицу под каждой буквой соответствующий отрезку номер.

Ответ:

А	Б	В	Г

18. Некоторые сотрудники фирмы летом 2014 года отдыхали в Крыму, а некоторые — в Сочи. Все сотрудники, которые отдыхали в Сочи, не отдыхали в Крыму. Выберите утверждения, которые верны при указанных условиях.

1) Если сотрудник этой фирмы летом 2014 года отдыхал в Крыму, то он отдыхал и в Сочи.
2) Каждый сотрудник этой фирмы отдыхал летом 2014 года в Крыму.
3) Среди сотрудников этой фирмы, которые не отдыхали в Сочи летом 2014 года, есть хотя бы один, который отдыхал в Крыму.
4) Нет ни одного сотрудника этой фирмы, который летом 2014 года отдыхал и в Крыму, и в Сочи.

В ответе запишите номера выбранных утверждений без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

Ответ: ________________.

19. Найдите трехзначное натуральное число, большее 650, но меньшее 800, которое делится на каждую свою цифру и все цифры которого различны и не равны нулю. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

Ответ: ________________.

20. В корзине лежит 30 грибов: рыжики и грузди. Известно, что среди любых 12 грибов имеется хотя бы один рыжик, а среди любых 20 грибов — хотя бы один груздь. Сколько рыжиков в корзине?

Ответ: ________________.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

ВАРИАНТ 5

1. Найдите значение выражения $1,56:1,3-0,4$.

Ответ: ________________.

2. Найдите значение выражения $4\cdot 2^4+3\cdot 2^3$.

Ответ: ________________.

3. После уценки телевизора его новая цена составила 0,52 от старой цены. На сколько процентов уменьшилась цена телевизора в результате уценки?

Ответ: ________________.

4. Перевести температуру из шкалы Фаренгейта в шкалу Цельсия позволяет формула $t_C=\frac{5}{9}(t_F-32)$, где t_C — температура в градусах по шкале Цельсия, t_F — температура в градусах по шкале Фаренгейта. Скольким градусам по шкале Цельсия соответствует 50 градусов по шкале Фаренгейта?

Ответ: ________________.

5. Найдите значение выражения $\frac{7}{3}\sqrt{6}\cdot\sqrt{54}$.

Ответ: ________________.

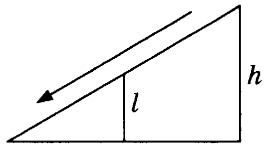
6. В мужском общежитии института в каждой комнате можно поселить не более четырех человек. Какое наименьшее количество комнат нужно для поселения 81 иногороднего студента?

Ответ: ________________.

7. Найдите корень уравнения $\log_3(2x-5)=2$.

Ответ: ________________.

8. Столб подпирает детскую горку посередине. Найдите высоту l этого столба, если высота h горки равна 4,2 м. Ответ дайте в метрах.



Ответ: ________________.

9. Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ	ЗНАЧЕНИЯ
А) масса кухонного холодильника	1) 3500 г
Б) масса карандаша	2) 38 кг
В) масса новорожденного ребенка	3) 15 г
Г) масса трамвая	4) 17 т

В таблице под каждой буквой, соответствующей величине, укажите номер ее возможного значения.

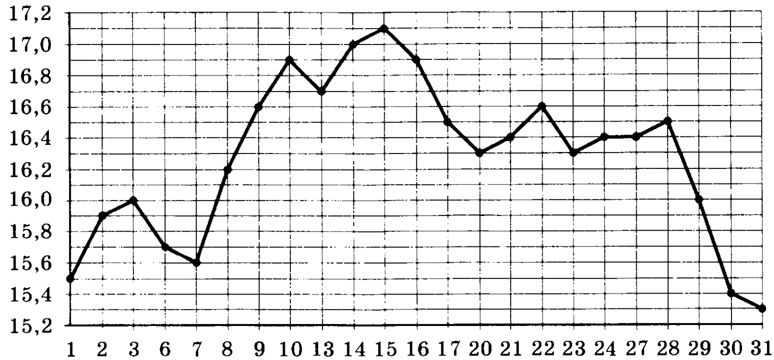
Ответ:

А	Б	В	Г

10. На тарелке лежат одинаковые на вид пирожки: 4 с мясом, 9 с капустой и 3 с вишней. Петя наугад выбирает один пирожок. Найдите вероятность того, что этот пирожок окажется с мясом.

Ответ: ________________.

11. На диаграмме жирными точками показана цена серебра, установленная Центробанком РФ во все рабочие дни в октябре 2009 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена серебра в рублях за грамм. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией.



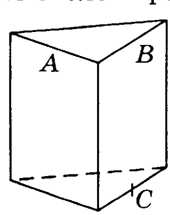
Определите по диаграмме наименьшую цену серебра в период с 9 по 22 октября. Ответ дайте в рублях за грамм.

Ответ: ________________.

12. При строительстве дома фирма использует один из типов фундамента: бетонный или пеноблочный. Для фундамента из пеноблоков необходимо 3 кубометра пеноблоков и 3 мешка цемента. Для бетонного фундамента необходимо 6 тонн щебня и 15 мешков цемента. Кубометр пеноблоков стоит 2700 рублей, щебень стоит 800 рублей за тонну, а мешок цемента стоит 280 рублей. Сколько рублей будет стоить материал для фундамента, если выбрать наиболее дешевый вариант?

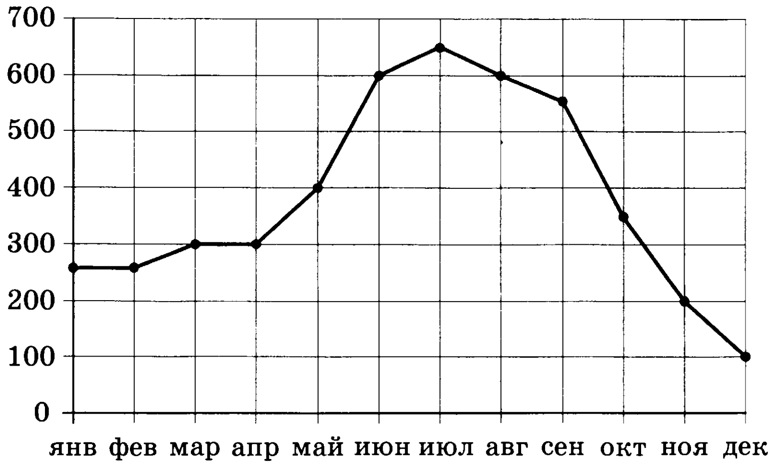
Ответ: ________________.

13. Плоскость, проходящая через точки A, B и C (см. рис.), разбивает правильную треугольную призму на два многогранника. Сколько вершин у получившегося многогранника с меньшим числом граней?



Ответ: ________________.

14. На диаграмме точками показаны объемы месячных продаж холодильников в магазине бытовой техники. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — количество проданных холодильников. Для наглядности точки соединены линией.



Пользуясь диаграммой, поставьте в соответствие каждому из указанных периодов времени характеристику продаж холодильников.

ПЕРИОДЫ ВРЕМЕНИ

А) январь–март

Б) апрель–июнь

В) июль–сентябрь

Г) октябрь–декабрь

ХАРАКТЕРИСТИКИ

1) в первый и второй месяц периода было продано одинаковое количество холодильников

2) самое медленное уменьшение ежемесячного объема продаж

3) ежемесячный объем продаж вырос на 200 холодильников за один месяц

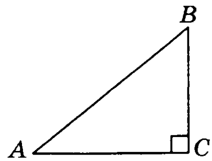
4) ежемесячный объем продаж уменьшился более чем на 200 холодильников за весь период

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

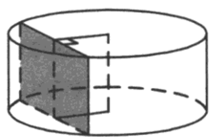
А	Б	В	Г

15. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $AB = 15$, $\sin A = 0{,}6$. Найдите AC.



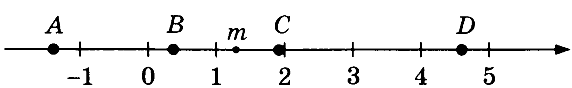
Ответ: ___________________.

16. Радиус основания цилиндра равен 20, а его образующая равна 8. Сечение, параллельное оси цилиндра, удалено от нее на расстояние, равное 12. Найдите площадь этого сечения.



Ответ: ___________________.

17. На координатной прямой отмечены число m и точки A, B, C и D.



Каждой точке соответствует одно из чисел в правом столбце. Установите соответствие между указанными точками и числами.

ТОЧКИ	ЧИСЛА
A	1) m^2
B	2) $6 - m$
C	3) $-\dfrac{2}{m}$
D	4) $m - 1$

Впишите в приведенную в ответе таблицу под каждой буквой соответствующий числу номер.

Ответ:

A	*B*	*C*	*D*

18. Перед волейбольным турниром измерили рост игроков волейбольной команды города N. Оказалось, что рост каждого из волейболистов этой команды больше 190 см и меньше 210 см. Выберите утверждения, которые верны при указанных условиях.

1) В волейбольной команде города N обязательно есть игрок, рост которого равен 220 см.
2) Рост любого волейболиста этой команды меньше 210 см.
3) Разница в росте любых двух игроков волейбольной команды города N составляет более 20 см.
4) В волейбольной команде города N нет игроков с ростом 189 см.

В ответе запишите номера выбранных утверждений без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

Ответ: ________________.

19. Найдите четырехзначное число, кратное 24, произведение цифр которого равно 16. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

Ответ: ________________.

20. На поверхности глобуса фломастером проведены 15 параллелей и 20 меридианов. На сколько частей проведенные линии разделили поверхность глобуса?

Меридиан — это дуга окружности, соединяющая Северный и Южный полюсы. Параллель — это окружность, лежащая в плоскости, параллельной плоскости экватора.

Ответ: ________________.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

ВАРИАНТ 6

1. Найдите значение выражения $\dfrac{1}{\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{7}}$.

Ответ: ________________.

2. Найдите значение выражения $\dfrac{(0{,}1)^2}{10^{-2}}\cdot 10^2$.

Ответ: ________________.

3. Ежемесячная плата за телефон составляет 250 рублей. В следующем году она увеличится на 4%. Сколько рублей будет составлять ежемесячная плата за телефон в следующем году?

Ответ: ________________.

4. Площадь четырехугольника можно вычислить по формуле $S=\dfrac{1}{2}d_1d_2\sin\alpha$, где d_1 и d_2 — длины диагоналей четырехугольника, α — угол между диагоналями. Пользуясь этой формулой, найдите площадь S, если $d_1 = 4$, $d_2 = 7$, а $\sin\alpha=\dfrac{2}{7}$.

Ответ: ________________.

5. Найдите значение выражения $\left(\sqrt{17}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{17}+\sqrt{5}\right)$.

Ответ: ________________.

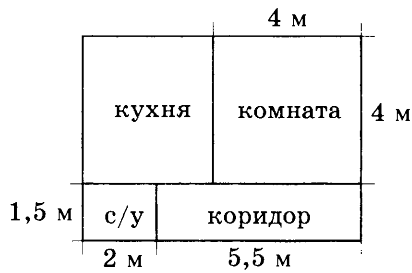
6. В доме, в котором живет Петя, один подъезд. На каждом этаже по семь квартир. Петя живет в квартире № 52. На каком этаже живет Петя?

Ответ: ________________.

7. Найдите корень уравнения $\left(\dfrac{1}{7}\right)^{x-5}=49$.

Ответ: ________________.

8. Квартира состоит из комнаты, кухни, коридора и санузла (см. чертеж). Комната имеет размеры 4 м × 4 м, санузел — 1,5 м × 2 м, длина коридора 5,5 м. Найдите площадь кухни (в квадратных метрах).



Ответ: ________________.

9. Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ	ЗНАЧЕНИЯ
А) объем железнодорожного вагона	1) 96 л
Б) объем пакета ряженки	2) 0,75 л
В) объем воды в Каспийском море	3) 90 м^3
Г) объем ящика комода	4) 78 200 км^3

В таблице под каждой буквой, соответствующей величине, укажите номер ее возможного значения.

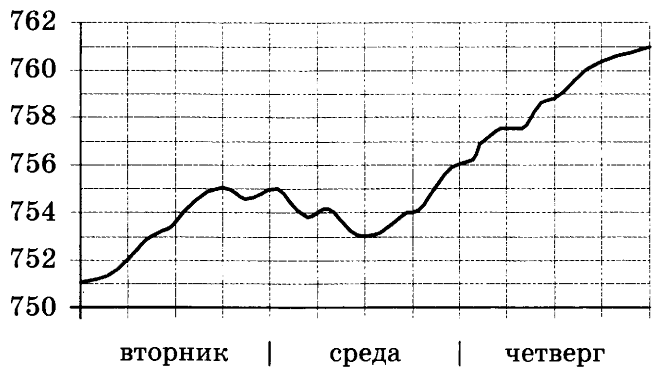
Ответ:

А	Б	В	Г

10. На птицеферме есть только куры и гуси, причем кур в 4 раза больше, чем гусей. Найдите вероятность того, что случайно выбранная на этой ферме птица окажется гусем.

Ответ: ________________.

11. На диаграмме изображен график значений атмосферного давления в некотором городе за три дня. По горизонтали указаны дни недели, по вертикали — значения атмосферного давления в миллиметрах ртутного столба.



Определите по диаграмме наименьшее значение атмосферного давления в среду (в миллиметрах ртутного столба).

Ответ: ________________.

12. Автомобильный журнал определяет рейтинг автомобилей на основе показателей безопасности S, комфорта C, функциональности F, качества Q и дизайна D. Рейтинг R вычисляется по формуле

$$R = \frac{3S + 2C + 2F + 2Q + D}{50}.$$

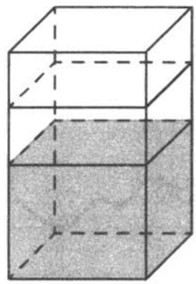
В таблице даны показатели трех моделей автомобилей

Модель автомобиля	Безопасность	Комфорт	Функциональность	Качество	Дизайн
А	1	4	5	1	1
Б	1	5	3	3	3
В	5	3	1	4	1

Найдите наивысший рейтинг среди рейтингов представленных моделей.

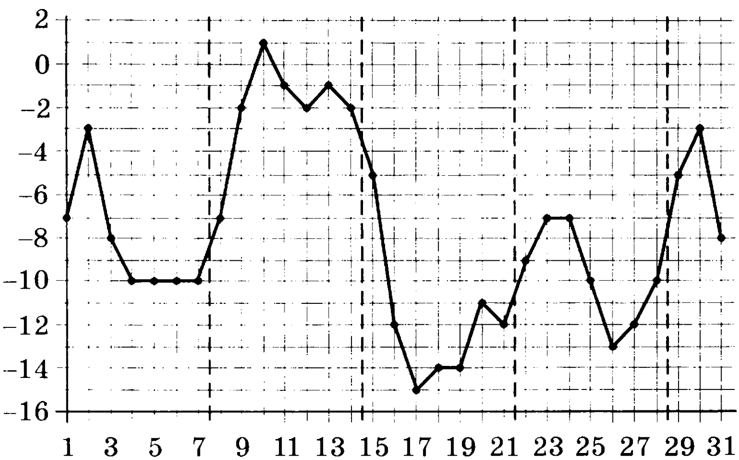
Ответ: ________________.

13. В бак, имеющий форму прямой призмы, налито 10 л воды. После полного погружения в воду детали уровень воды в баке увеличился в 1,7 раза. Найдите объем детали. Ответ дайте в кубических сантиметрах, зная, что в одном литре 1000 кубических сантиметров.



Ответ: ____________________.

14. На диаграмме точками показана среднесуточная температура воздуха в Москве в январе 2011 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Для наглядности точки соединены линией.



Пользуясь диаграммой, поставьте в соответствие каждому из указанных периодов времени характеристику изменения температуры.

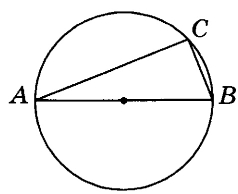
ПЕРИОДЫ ВРЕМЕНИ	ХАРАКТЕРИСТИКИ
А) 1–7 января	1) в конце периода наблюдался рост среднесуточной температуры
Б) 8–14 января	2) во второй половине периода среднесуточная температура не изменялась
В) 15–21 января	3) среднесуточная температура достигла месячного минимума
Г) 22–28 января	4) среднесуточная температура достигла месячного максимума

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

А	Б	В	Г

15. На окружности радиуса 3 отмечена точка C. Отрезок AB — диаметр окружности, $AC = 2\sqrt{5}$. Найдите BC.



Ответ: __________________.

16. Даны два шара с радиусами 5 и 1. Во сколько раз объем большего шара больше объема меньшего?

Ответ: __________________.

17. Каждому из четырех неравенств в левом столбце соответствует одно из решений в правом столбце. Установите соответствие между неравенствами и их решениями.

НЕРАВЕНСТВА	РЕШЕНИЯ
А) $0{,}5^x \le 2$	1) $(-\infty;1]$
Б) $2^x \ge 2$	2) $[-1;+\infty)$
В) $0{,}5^x \ge 2$	3) $[1;+\infty)$
Г) $2^x \le 2$	4) $(-\infty;-1]$

Впишите в приведенную в ответе таблицу под каждой буквой соответствующий решению номер.

Ответ:

А	Б	В	Г

18. Школа приобрела стол, доску, магнитофон и принтер. Известно, что принтер дороже магнитофона, а доска дешевле магнитофона и дешевле стола. Выберите утверждения, которые верны при указанных условиях.

1) Магнитофон дешевле доски.
2) Принтер и доска стоят одинаково.
3) Принтер дороже доски.
4) Доска — самая дешевая из покупок.

В ответе запишите номера выбранных утверждений без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

Ответ: ________________.

19. Найдите шестизначное натуральное число, которое записывается только цифрами 1 и 2 и делится на 72. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

Ответ: ________________.

20. Список заданий викторины состоял из 25 вопросов. За каждый правильный ответ ученик получал 7 очков, за неправильный ответ с него списывали 10 очков, а при отсутствии ответа давали 0 очков. Сколько верных ответов дал ученик, набравший 42 очка, если известно, что, по крайней мере, один раз он ошибся?

Ответ: ________________.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

ОТВЕТЫ

Ответы к главам 1–9 и к справочнику

<table>
<tr><th>№ задачи</th><th>Ответ</th><th>№ задачи</th><th>Ответ</th></tr>
<tr><td>1</td><td>справа; 21</td><td>22</td><td>нет</td></tr>
<tr><td>2</td><td>а) 7; б) 11</td><td>23</td><td>16,5</td></tr>
<tr><td>3</td><td>8</td><td>24</td><td>7 часов</td></tr>
<tr><td>4</td><td>3</td><td>25</td><td>10</td></tr>
<tr><td>5</td><td>11</td><td>26</td><td>3</td></tr>
<tr><td>6</td><td>11,285</td><td>27</td><td>5</td></tr>
<tr><td>7</td><td>19 176</td><td>28</td><td>65</td></tr>
<tr><td rowspan="2">8</td><td rowspan="2">а) 1380; б) 833 автралийских доллара и 33 цента</td><td>29</td><td>20</td></tr>
<tr><td>30</td><td>657</td></tr>
<tr><td>9</td><td>2314</td><td>31</td><td>3</td></tr>
<tr><td>10</td><td>384 000</td><td>32</td><td>65</td></tr>
<tr><td>11</td><td>3590 рублей</td><td>33</td><td>77</td></tr>
<tr><td>12</td><td>10 900</td><td>34</td><td>109</td></tr>
<tr><td>13</td><td>44,1</td><td>35</td><td>21</td></tr>
<tr><td rowspan="5">14</td><td rowspan="5">ТРЕБУЕТСЯ МУЖЧИНА весом 118–122 кг, ростом около 180 см, 45–55 лет, европеоидной наружности, талия не больше 122 см, способный вести активный образ жизни</td><td>36</td><td>2413</td></tr>
<tr><td>37</td><td>4321</td></tr>
<tr><td>38</td><td>104 000</td></tr>
<tr><td>39</td><td>406</td></tr>
<tr><td>40</td><td>750</td></tr>
<tr><td>15</td><td>$t_C = \frac{5}{9}(t_F - 32)$</td><td>41</td><td>220</td></tr>
<tr><td>16</td><td>−40 °C = −40 °F</td><td>42</td><td>а) нельзя; б) 0,8; в) можно</td></tr>
<tr><td>18</td><td>Градус Цельсия крупнее</td><td>44</td><td>57</td></tr>
<tr><td>19</td><td>233 °C</td><td>45</td><td>1 часть воды на 2 части уксуса</td></tr>
<tr><td>20</td><td>8 часов утра</td><td>46</td><td>1,16 кг</td></tr>
<tr><td>21</td><td>можно</td><td>50</td><td>35 000</td></tr>
</table>

№ задачи	Ответ	№ задачи	Ответ
54	25%	97	3
55	11 881 рубль	98	1
59	3,75	99	−3
60	−4	100	−4
61	60,78	101	1
62	28	102	13
63	16	103	30°
64	550	111	25
65	459	112	89°, 25°
66	≈ 94 см (938,7 мм)	114	120°
67	2340	117	69°
68	27	122	$2\sqrt{31}$
69	1020	123	$6\sqrt{6}$
70	15	125	10,5
71	12 500	126	12,5
72	95	127	693
73	9570	128	45 $м^2$
74	67 195 р. 82 коп.	129	14
75	$\frac{1}{2}$	130	в 4 раза
		131	в 9 раз
76	$-\frac{4}{3}$	132	17 см
		134	3,25 (3 кг 250 г)
87	0,5	135	45
88	−0,4	136	24
89	−12	137	29,4
90	3	138	6
91	−2	139	125
92	5	142	16
93	14	146	126
94	7,5	147	1919
95	12	148	81
96	−2	149	13

№ задачи	Ответ	№ задачи	Ответ
150	22,5	186	а) существует кошка, которая не ступает мягко (или: хотя бы одна кошка не ступает мягко); б) все англичане — не брюнеты (или: каждый англичанин — не брюнет; среди англичан брюнетов нет; ни один англичанин не является брюнетом); в) у всякого квадрата диагонали перпендикулярны; г) существует собака, у которой нет хвоста
151	28		
152	3		
153	180		
154	6000		
155	36		
156	6		
157	4		
158	3		
159	32		
160	7		
161	13	187	а) существует мышь без хвоста; б) во всех реках водится рыба; в) все кошки покрыты шерстью; г) существует треугольник, у которого есть неострый угол
164	0,5		
165	−4		
166	5		
167	−8	188	4, 6, 7
171	а) 0,4; б) −1	189	1, 6, 7
172	10	190	а) пингвин — птица нелетающая; б) если одно из слагаемых — ноль, то сумма равна первому слагаемому; в) есть обезьяны, которые живут в Индии; г) в прямоугольник с неравными сторонами вписать окружность нельзя
173	8		
174	16		
175	16		
176	0,2		
177	1,25		
178	0,7	192	1) Существует треугольник, вокруг которого нельзя описать окружность. 2) В любом море найдется хотя бы один остров. 3) Существует хотя бы одна кошка, которая не любит ловить мышей. 4) Найдется собака, которая виляет хвостом не каждый день. 5) В любом ромбе диагонали имеют разную длину
179	29		
180	−0,25		
181	−1		
182	4		
183	31		
184	35		
185	−116		

№ задачи	Ответ	№ задачи	Ответ
193	а) 4, 6; б) 1	242	3412
194	24	243	2413
195	13	244	1,5
196	14	246	1234
197	23	247	3
198	а) 18; б) 4	248	3
199	а) 1,5; б) 14	249	3
200	4	250	17
213	0,07	251	1
214	0,375	252	5
215	6	253	16
216	0,125	254	5326, 7464
217	0,037	255	нет
218	0,013	256	$801 = 9 \cdot 89$; $5409 = 9 \cdot 601$; $473 = 11 \cdot 43$
219	0,04		
220	0,994		
221	0,0288	257	НОК = 252; НОД = 84
222	0,392		
223	0,6075	258	$\frac{2}{9}$; $\frac{1}{7}$; $\frac{372}{671}$
224	0,25		
225	0,5	259	$\frac{1}{15}$; $\frac{4}{9}$
226	0,9604		
227	0,82	260	$\frac{20}{9}$; $\frac{8}{21}$
228	0,125		
229	0,032	261	$\frac{35}{76}$; $\frac{41}{21}$; $\frac{5}{42}$
230	0,47		
231	0,004	262	$5\frac{2}{13}$; $\frac{37}{15}$
232	0,4968		
233	0,48	263	0,75; невозм.; 2,68; 1,55; невозм.
235	1		
236	1	264	$32a^2$; 7^6; 16; 4^{-3}
237	5	265	24; $5 - x$; $x - 5$; $\frac{3}{4}$

№ задачи	Ответ	№ задачи	Ответ
266	$x^2+8x+16$; $4a^2-12a+9$	294	24
		295	10,625
267	$a-b$	296	39
268	1	297	60,5
269	4; –2; $\frac{1}{2}$; 3	298	4,5
		299	30
270	1; 1	300	14
271	$\frac{2}{25}$	301	84
		302	36
272	$\frac{3}{8}$; $-\frac{5}{2}$; $-\frac{13}{8}$	303	100
		304	78
273	2, –9; –2, $\frac{7}{3}$; –1,2	305	144
		306	40
274	а) $x>2$; б) $x>9$	307	118
275	а) $x<2$; $x>3$; б) $x<-2$; $-\frac{5}{3}\le x\le 1$	308	6
		309	384
283	41	310	40
284	39	311	а) плюс; б) минус; в) минус
285	32		
286	$8\sqrt{3}$	312	1,5
287	0,125	313	–0,96
288	2,5; 6,5; $\frac{60}{13}$; 3,25; $\frac{25}{26}$; $\frac{72}{13}$	314	–0,9
		315	0,23
		316	$\frac{15}{17}$
289	2	317	–0,6
290	4	318	6
291	225	319	–2
292	120	320	–0,1
293	90	321	–0,5

№ задачи	Ответ	№ задачи	Ответ
322	$\dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$	326	$\dfrac{e^{2x}(2x-3)}{(x-1)^2}$
323	$\dfrac{77}{36}$	328	16
		329	−3
324	$15x^4-21x^2+4x-5$	330	6
325	$(2x+3)\ln x+x+3+\dfrac{1}{x}$	331	12

Ответы к подготовительным задачам

АЛГЕБРА

№ задачи	Ответ	№ задачи	Ответ
332	108	353	3
333	2	354	8
334	12	355	11
335	31,9	356	2413
336	36	357	1423
337	7	358	1324
338	49	359	2314
339	4	360	1234
340	8	361	3124
341	7230	362	84762; 85176; 54162
342	4780	363	63630; 69696; 63036
343	81	364	2235; 3225; 2325
344	12	365	210; 420; 840; 980
345	0,1	366	1125; 1215; 2115
346	18	367	53160; 53640
347	1	368	4
348	5	369	30
349	12	370	24
350	2, 3	371	12
351	−2, 9	372	5
352	5	373	22

ГЕОМЕТРИЯ

№ задачи	Ответ	№ задачи	Ответ
374	12	381	26
375	8	382	9
376	130	383	36
377	12	384	4000
378	564	385	6
379	20	386	8
380	20	387	54

388	23	**393**	2
389	85	**394**	2
390	0,6	**395**	18
391	6	**396**	75
392	320	**397**	1

ПРАКТИЧЕСКАЯ МАТЕМАТИКА

№ задачи	Ответ	№ задачи	Ответ
398	78	**425**	0,35
399	45	**426**	0,25
400	15	**427**	0,2
401	57	**428**	4
402	40	**429**	12
403	7830	**430**	2
404	28	**431**	200
405	205	**432**	753
406	24	**433**	18
407	17	**434**	2
408	5	**435**	13; 31
409	48	**436**	460
410	7	**437**	54 000
411	112	**438**	630
412	7	**439**	22
413	75	**440**	4123
414	12	**441**	1243
415	13	**442**	2134
416	1432	**443**	1423
417	3412	**444**	2413
418	4312	**445**	3412
419	3214	**446**	13
420	1324	**447**	14
421	3412	**448**	23
422	0,05	**449**	13
423	0,95	**450**	13
424	0,18	**451**	12

Ответы к тренировочным вариантам

№ варианта	№ задания				
	1	2	3	4	5
1	−1	3	21	0,1	0,4
2	4	2	75	1280	24
3	3	4	200	108	16
4	21	3	77	22	3
5	0,8	88	48	10	42
6	2,1	100	260	4	12

№ варианта	№ задания				
	6	7	8	9	10
1	32 000	−1	9	3214	0,04
2	81	−1	120	4312	0,65
3	7	−2	0,3; −0,3	1432	0,8
4	19	1	525	4312	0,12
5	21	7	2,1	2314	0,25
6	8	3	14	3241	0,2

№ варианта	№ задания						
	11	12	13	14	15	16	17
1	6	2430	20	2134	3	32	2413
2	3	20 980	70	1324	84	9	1324
3	2	700	7	2314	49	1,5	2143
4	5	5050	14	3421	81	3	4321
5	16,3	8940	6	1324	12	256	3412
6	753	0,64	7000	2431	4	125	2341

№ варианта	№ задания		
	18	19	20
1	14	415650; 115650; 145650	10
2	13	11152; 11512; 15112; 51112; 11222; 12122; 21122; 12212; 21212; 22112	17
3	34	63030; 63630; 69630	10
4	34	672; 728; 735; 784	19
5	24	1224; 1128; 8112	320
6	34	122112; 212112; 221112	16

Справочное издание

Высоцкий Иван Ростиславович
Ященко Иван Валерьевич

МАТЕМАТИКА ДЛЯ НЕЛЮБИТЕЛЕЙ

Подготовка к ЕГЭ

Базовый уровень

Издательство ***«ЭКЗАМЕН»***
Гигиенический сертификат
№ РОСС RU.ПЩ01.Н00199 от 19.05.2016 г.

Главный редактор *Л. Д. Лаппо*
Редактор *И. М. Бокова*
Технический редактор *Л. В. Павлова*
Корректоры *Г. М. Морозова, Н. Е. Жданова*
Дизайн обложки *С. М. Кривенкина*
Компьютерная верстка *А. В. Толокевич*

107045, Москва, Луков пер., д. 8.
www.examen.biz
E-mail: по общим вопросам: info@examen.biz;
по вопросам реализации: sale@examen.biz
тел./факс 8 (495) 641-00-30 (многоканальный)

Общероссийский классификатор продукции
ОК 005-93, том 2; 953005 — книги, брошюры,
литература учебная

Отпечатано в «Красногорская типография»
143405, Московская область,
г. Красногорск, Коммунальный квартал, 2

По вопросам реализации обращаться по тел.:
8 (495) 641-00-30 (многоканальный).